

# ANÁLISIS REAL I - 2020. TAREA 7

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

**Para entregar :** Jueves 9 de abril

**Antes de las 11:40 AM** 100%

**Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM** 80%

**No se aceptarán tareas después de las 5 PM**

**Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles**

**Problema 1:** Considere la siguiente función

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x + 2 & \text{si } 1 < x \end{cases} .$$

Es sabido que  $g$ , por ser una función no decreciente continua por la izquierda, genera unívocamente a una medida boheriana en  $\mathbb{R}$  que denotaremos por  $\mu$ . Encuentre la descomposición de Lebesgue de  $\mu$ .

**Problema 2:** Sea  $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, \mu)$  un espacio con medida, donde  $\mathfrak{L}$  es la  $\sigma$ -álgebra donde está definida la medida de Lebesgue  $\lambda$  y existe  $C > 0$  tal que  $\mu \leq C\lambda$ . Demuestre que si  $f$  es integrable (o sea  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, \mu)$ ), entonces la función

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f d\mu$$

es continua.

**Problema 3:** En un espacio de medida positiva  $(X, \mu)$ , sean  $h : X \rightarrow [0, \infty)$  una función integrable,  $f_n$  y  $f$  medibles de  $X$  en  $\mathbb{R}$  tales que  $f_n \geq -h$  para toda  $n$  y  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , para toda  $x \in X$ . Muestra que existen las integrales  $\int f_n d\mu$  para toda  $n$  y  $\int f d\mu$ , y que se cumple

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

*Sugerencia:* Mostrar que  $f^- \leq h$ .

**Problema 4:** Sea  $(X, \mu)$  un espacio de medida positiva. Si  $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones medibles, por definición  $f_n \rightarrow f$  en medida si

$$E_n(\alpha) := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$$

satisface  $\mu(E_n(\alpha)) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , para toda  $\alpha > 0$ . Define para  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  medible:

$$q(f) := \int_X \frac{|f|}{1 + |f|} d\mu.$$

Muestra que si  $\mu(X) < \infty$ , entonces  $f_n \rightarrow f$  en medida si y sólo si  $q(f_n - f) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

*Sugerencia:* Investigar primero la monotonía del mapeo  $s \mapsto s/(1 + 2)$  en  $[0, \infty]$ .

**Problema 5:** Sea  $X$  un conjunto no numerable, y sea  $\mathcal{A} \subset 2^X$  la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  definida por:  $A \in \mathcal{A}$  si y sólo si  $A$  es numerable o  $X \setminus A$  es numerable. Sea  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  la medida respectiva que cuenta (ver definición en la referencia de *Rudin*). Sea  $\lambda$  la medida en  $\mathcal{A}$  tal que  $\lambda(A) = 0$  si  $A$  es numerable y  $\lambda(A) = \infty$  si  $A$  no lo es. Muestra que  $\lambda \ll \mu$ , es decir,  $\lambda$  es absolutamente continua con respecto a  $\mu$ , pero que la conclusión del teorema de Radon-Nikodým no es válida.