

## ANÁLISIS REAL I - 2020. TAREA 4

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

**Para entregar :** Jueves 5 de marzo

**Antes de las 11:10 AM** 100%

**Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM** 80%

**No se aceptarán tareas después de las 5 PM**

**Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles**

**Problema 1:** Determina si la función

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .

**Problema 2:** Encuentra funciones continuas  $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  donde  $f_n \rightarrow 0$  puntualmente pero no uniformemente cuando  $n \rightarrow \infty$ . *Sugerencia:* Sea  $f_n(1/n) = 1, f_n(0) = f_n(2/n) = 0$ . (Esto muestra porque la convergencia monótona,  $f_n \rightarrow f_0$ , es útil en el teorema de Dini).

**Problema 3:** Muestra de manera directa que las funciones  $f_n(x) = x^n$  en  $[0, 1]$  no son equicontinuas en 1 (sin aplicar los teoremas).

**Problema 4:** Muestra que las funciones  $x \mapsto \sin(nx)$  en  $[0, 1]$  para  $n = 1, 2, \dots$ , no son equicontinuas en 0.

**Problema 5:** Muestra que la cerradura de un conjunto que es denso en ninguna parte es denso en ninguna parte.

**Problema 6:** Muestra que el conjunto de los números irracionales  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , con la topología relativa usual es topológicamente completo. Define una métrica completa para  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  con la topología relativa usual.