

## ANÁLISIS REAL I - 2020. TAREA 3

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

**Para entregar :** Jueves, 27 de febrero

**Antes de las 11:10 AM** 100%

**Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM** 80%

**No se aceptarán tareas después de las 5 PM**

**Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles**

**Problema 1:** Sean  $(X, \tau)$  y  $(Y, \mathcal{U})$  espacios topológicos y  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  bases para las topologías  $\tau, \mathcal{U}$  respectivamente. Muestra que la colección de conjuntos  $A \times B$  para  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{B}$  es una base para la topología producto en  $X \times Y$ .

**Problema 2:** Sea  $(S, \tau)$  un espacio topológico. Se dice que  $S$  es conexo si  $S$  no es la unión de dos conjuntos abiertos no-vacíos disjuntos.

- (a) Demuestra que si  $S$  es conexo y  $f$  es una función continua suprayectiva de  $S$  en  $T$ , entonces  $T$  también es conexo.
- (b) Demuestra que para cada  $a < b$  en  $\mathbb{R}$ ,  $[a, b]$  es conexo. *Sugerencia:* Supongamos que  $[a, b] = U \cup V$  para dos abiertos relativos disjuntos no vacíos  $U, V$ . Supongamos que  $c \in U$  y  $d \in V$  con  $c < d$ . Sea  $t := \sup(U \cap [c, d])$ . Entonces  $t \in U$  o  $t \in V$  nos da una contradicción.
- (c) Si  $S \subset \mathbb{R}$  es conexo y  $c < d, c, d \in S$ , muestra que  $[c, d] \subset S$ . *Sugerencia:* Supongamos que  $c < t < s$  y  $t \notin S$ . Consideremos  $(-\infty, t) \cap S$  y  $(t, \infty) \cap S$ .
- (d) (Teorema de valor medio). Sea  $a < b$  en  $\mathbb{R}$  y sea  $f$  una función continua de  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$ . Muestra que  $f$  toma todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$ . *Sugerencia:* Aplica las partes (a), (b) y (c).

**Problema 3:** Muestra que cualquier cubierta abierta de un espacio métrico separable tiene una subcubierta numerable.

**Problema 4:** Un punto  $x$  en un espacio topológico se llama aislado si  $\{x\}$  es abierto. Un espacio topológico compacto se llama perfecto si no tiene puntos aislados. Muestra que

- (a) Cualquier espacio métrico compacto es la unión de un conjunto contable y un conjunto perfecto. *Sugerencia:* Considera el conjunto de todos los puntos que tienen una vecindad abierta contable y usa el problema anterior.
- (b) Si  $(K, d)$  es perfecto, entonces cualquier subconjunto no vacío abierto de  $K$  es no-contable.