ANÁLISIS REAL I - 2020. TAREA 13

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes 9 de junio

Problema 1: Supongamos que $1 \leq p \leq \infty$, y que q es el esponente conjugado de p. Supongamos que μ es una medida positiva σ-finita y que g es una función medible tal que $fg \in L^1(\mu)$ para cada $f \in L^p(\mu)$. Prueba que $g \in L^q(\mu)$.

Problema 2: Supongamos que X consiste de dos puntos a y b; define $\mu(\{a\}) = 1, \mu(\{b\}) = \mu(X) = \infty$, y $\mu(\emptyset) = 0$. es cierto que para esta medida μ, $L^\infty(\mu)$ es el espacio dual de $L^1(\mu)$?

Problema 3: Supongamos que μ es una medida positiva en X, $\mu(X) < \infty$, $f_n \in L^1(\mu)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, $f_n(x) \to f(x)$ μ-c.t.p. y que existe $p > 1$ y $C < \infty$ tal que $\int_X |f_n|^p d\mu < \infty$ para todo n. Prueba que

$$\lim_{n\to\infty} |f - f_n| d\mu = 0.$$

Sugerencia: $\{f_n\}$ es uniformemente integrable.

Problema 4: Supongamos que G es un subgrupo de $\mathbb{R}$ (relativo a la suma), $G \neq \mathbb{R}$, y que G es Lebesgue medible. Demuestra que $m(G) = 0$. *Sugerencia:* Usar el ejercicio 5 de Rudin, pag. 156.

Problema 5: Supongamos que f es una función Lebesgue medible no-negativa y real-valuada en $\mathbb{R}$. Sea $A(f) = \{(x, y) : 0 < y < f(x)\}$.

(a) Es cierto que $A(f)$ es Lebesgue medible en el espacio producto?
(b) Si la respuesta a la parte (a) es afirmativa, es la integral de f en $\mathbb{R}$ igual a la medida de $A(f)$?
(c) Es la grafica de f una subconjunto medible de $\mathbb{R}^2$?
(d) Si la respuesta a (c) es afirmativa, es la medida de la gráfica igual a cero?

Problema 6: Calcula la transformada de Fourier de una función característica en un intervalo. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, sea g_n la función característica en $[-n, n]$, sea h la función característica en $[-1, 1]$, y calcula $g_n * h$ explícitamente. (La gráfica es lineal por pedazos). Muestra que $g_n * h$ es la transformada de Fourier de una función $f_n \in L^1$; excepto por una constante multiplicativa,

$$f_n(x) = \frac{\sin(x)\sin(nx)}{x^2}.$$

Muestra que $||f_n||_1 \to \infty$ y concluye que el mapeo $f \to \hat{f}$ manda L^1 en un subconjunto propio de C_o. Muestra sin embargo, que el rango de este mapeo es denso en C_o.

Problema 7: Encuentra

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin(\lambda t)}{t} e^{itx} dt, (-\infty < x < \infty),$$

donde λ es una constante positiva.