# ANÁLISIS REAL I - 2020. TAREA 11

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

**Para entregar :** Jueves 21 de mayo

**Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles**

**Problema 1:** Si $M$ es un sub-espacio cerrado de $H$ (espacio de Hilbert), muestra que $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M$. Hay algún enunciado similar para sub-espacios $M$ que no son necesariamente cerrados?

**Problema 2:** Sea $\{x_n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en $H$ (espacio de Hilbert). Muestra que la siguiente construcción forma un conjunto ortonormal $\{u_n\}$ tal que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{u_n, \ldots, u_N\}$ generan (span) el mismo espacio. Sea $u_1 = x_1/||x_1||$. Teniendo $u_1, \ldots, u_{N-1}$ define

$$v_N = x_N - \sum_{i=1}^{N-1} \langle x_n, u_i \rangle u_i, u_N = v_N/||v_N||.$$

**Nota:** Esto prueba la existencia de un conjunto ortonormal maximal en un espacio de Hilbert separable sin usar el principio de maximalidad de Hausdorff.

**Problema 3:** Si $A \subset [0, 2\pi]$ y $A$ es medible, prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \cos(nx)dx = \lim_{n\to\infty} \int_A \sin(nx)dx = 0.$$