ANÁLISIS REAL I - 2020. TAREA 10

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Jueves 14 de mayo

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Supongamos que φ es una función real continua en (a, b) de tal forma que

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(y)$$

para toda $x, y \in (a, b)$. Demuestra que φ es convexa. (Esta conclusión no se sigue si la continuidad se omite de las hipótesis).

Problema 2: Supongamos que f es una función compleja medible en X, μ es una medida positiva en X, y

$$\varphi(p) = \int_x |f|^p d\mu = ||f||_p^p. \;\; (0 < p < \infty).$$

Sea $E = \{p : \varphi(p) < \infty\}$. Supongamos que $||f||_\infty > 0$.

(a) Si $r < p < s, r \in E$, y $s \in E$, demuestra que $p \in E$.

(b) Prueva que $\log \varphi$ es convexa en el interior de E y que φ es continua en E.

(c) Por (a), E es conexo. Es E necesariamente abierto? Cerrado? Puede E consistir de un solo punto? Puede E se cualquier subconjunto conexo de $(0, \infty)$?

(d) Si $r < p < s$, demuestra que $||f||_p \leq \max(||f||_r, ||f||_s)$. Muestra que esto implica la inclusión

$$L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subset L^p(\mu).$$

(e) Supongamos que $||f||_r < \infty$ para algún $r < \infty$. Demuestra que

$$||f||_p \to ||f||_\infty \text{ cuando } p \to \infty.$$

Problema 3: Supongamos, además de las hipótesis del problema 2, que $\mu(X) = 1$.

(a) Demuestra que $||f||_r \leq ||f||_s$ si $0 < r < s \leq \infty$.

(b) Bajo que condiciones sucede que $0 < r < s \leq \infty$ y $||f||_r = ||f||_s < \infty$?

(c) Demuestra que $L^r(\mu) \supset L^s(\mu)$ si $0 < r < s$. Bajo qué condiciones esos dos espacios contienen las mismas funciones?

(d) Supongamos que $||f||_r < \infty$ para algún $r > 0$. Demuestra que

$$\lim_{p \to 0} ||f||_p = \exp\left\{\int_X \log|f| d\mu\right\}$$

si $\exp(-\infty)$ se define como cero.

Problema 4: Supongamos que $f_n \in L^p(\mu), n = 1, 2, 3, \ldots, ||f_n - f||_p \to 0$ y $f_n \to g$ μ-c.t.p. cuando $n \to \infty$. Qué relación existe entre f y g?

Problema 5: Supongamos que $\mu(\Omega) = 1$ y f, g son funciones medibles en Ω tal que $fg \geq 1$. Demuestra que $\int_\Omega f d\mu \int_\Omega g d\mu \geq 1$.