Análisis Real I
Posgrado en Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de Mexico
Examen 3

Profesor: Gerardo Hernández Dueñas

Julio 12, 2020

*** POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA**
*** EXPLICA TU RESPUESTA E INCLUYE LOS DETALLES**

NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 6

TU NOMBRE:

Prob 1 /40	
Prob 2 /20	
Prob 3 /20	
Prob 4 /20	
TOTAL /100	

Mucho éxito en su examen!

Análisis Real I - Examen 3

Problema 1: Supongamos que f es una función compleja medible en X, μ es una medida positiva en X, y

$$\varphi(p) = \int_x |f|^p d\mu = ||f||_p^p. \ (0 < p < \infty).$$

Sea $E = \{p : \varphi(p) < \infty\}$. Supongamos que $||f||_\infty > 0$.

(a) Si $r < p < s, r \in E$, y $s \in E$, demuestra que $p \in E$.

(b) Prueba que $\log \varphi$ es convexa en el interior de E y que φ es continua en E.

continuación del problema 1

(c) Si $r < p < s$, demuestra que $||f||_p \leq \max(||f||_r, ||f||_s)$. Muestra que esto implica la inclusión

$$L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subset L^p(\mu).$$

(d) Supongamos que $||f||_r < \infty$ para algún $r < \infty$. Demuestra que

$$||f||_p \to ||f||_\infty \text{ cuando } p \to \infty.$$

Análisis Real I - Examen 3

Problema 2 Sea $\mathcal{S}$ la clase de todas las funciones f en $\mathbb{R}$ que tienen la siguiente propiedad: f es infinitamente diferenciable, y existen números $A_{m,n}(f) < \infty$ para $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ (dependen de f solamente) tales que

$$|x^n D^m f(x)| \leq A_{m,n}(f), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aquí D es el operador diferenciación. Demuestra que la transformada de Fourier mapea $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$.

Problema 3: Supongamos que $1 \leq p \leq \infty$, y que q es el esponente conjugado de p. Supongamos que μ es una medida positiva σ-finita y que g es una función medible tal que $fg \in L^1(\mu)$ para cada $f \in L^p(\mu)$. Prueba que $g \in L^q(\mu)$.

Problema 4: Supongamos que X consiste de dos puntos a y b; define $\mu(\{a\}) = 1, \mu(\{b\}) = \mu(X) = \infty$, y $\mu(\emptyset) = 0$. Es cierto que para esta medida μ, $L^\infty(\mu)$ es el espacio dual de $L^1(\mu)$?