Análisis Real I
Posgrado en Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de Mexico
Examen 2

Profesor: Gerardo Hernández Dueñas

Mayo 9, 2020

*** POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA**
*** EXPLICA TU RESPUESTA E INCLUYE LOS DETALLES**

NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 9

TU NOMBRE:

Prob 1 /30	
Prob 2 /15	
Prob 3 /20	
Prob 4 /15	
Prob 5 /20	
Bono /10	
TOTAL /100+10	

Mucho éxito en su examen!

Análisis Real I - Examen 2

Problema 1: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida y $D \in \mathcal{A}$ un conjunto medible. Sean $\{f_n\}, f$ funciones medibles. Se dice que $\{f_n\}$ converge en medida μ en D a f ($f_n \to^{\mu} f$) si para cada $\epsilon > 0$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in D : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = 0.$$

(a) Muestra que la condición

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in D : |f_n(x) - f(x)| > 0\} = 0$$

implica que $f_n \to^{\mu} f$ en D.

(b) Muestra que la implicación conversa no es cierta.

(c) **(continuación del problema 1)** Muestra que la condición en (a) implica que para $\mu-$c.t.p $x \in D$ tenemos $f_n(x) = f(x)$ para un número infinito de indices $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2: Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones medibles real-valuadas no-negativas en $\mathbb{R}$ tales que $f_n \to f$ μ-c.t.p. en $\mathbb{R}$. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu < \infty.$$

Muestra que para cada conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E} f_n d\mu = \int_{E} f d\mu.$$

Problema 3: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida y $D \in \mathcal{A}$ un conjunto medible. Sea $\{f_n\}$ y f funciones medibles y real valuadas $\mu-$c.t.p. en D. Supongamos que existe una sucesión de números positivos $\{\epsilon_n\}$ tales que

(1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n < \infty$

(2) $\int_D |f_n - f| d\mu < \epsilon_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Muestra que la sucesión $\{f_n\}$ converge a f $\mu-$c.t.p. en D.
Nota: No se supone integrabilidad de $f_n, f, |f|$.

Problema 4: Sea X un conjunto no numerable, y sea $\mathcal{A} \subset 2^X$ la $\sigma-$álgebra de subconjuntons de X definida por: $A \in \mathcal{A}$ si y sólo su A es numerable o $X \setminus A$ es numerable. Sea $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{N}_o \cup \{\infty\}$ la medida respectiva que cuenta. Sea λ la medida en $\mathcal{A}$ tal que $\lambda(A) = 0$ si A es numerable y $\lambda(A) = \infty$ si A no lo es. Muestra que $\lambda << \mu$, es decir, λ es absolutamente continua con respecto a μ, pero que la conclusión del teorema de Radon-Nikodým no es valida.

Problema 5: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles real valuadas e integrables en $D \in \mathcal{A}$. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \ \ \mu\text{c.t.p. en } D.$$

(a) Muestra que si $\lim_{n\to\infty} \int_D |f_n| d\mu = \int_D |f| d\mu$, entonces $\lim_{n\to\infty} \int_D f_n d\mu = \int_D f d\mu$.

Sugerencia: Aplica la extensión de convergencia dominada escrito en el siguiente problema para $g_n = 2(|f_n| + |f|)$ y $h_n = |f_n - f| + |f_n| - |f|$.

(b) **(continuación del problema 5)** Muestra que el converso de la parte (a) es falso construyendo un contra-ejemplo.

Bono: (Extensión del Teorema de Convergencia Dominada). Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y f, g funciones medibles real-valuadas. Sea $D \in \mathcal{A}$ un conjunto medible. Supongamos que

(a) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ y $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ $\mu-$ c.t.p. en D.

(b) $\{g_n\}$ y g son integrables en D y $\lim_{n\to\infty} \int_D g_n d\mu = \int_D g d\mu$.

(c) $|f_n| \leq g_n$ en D para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demuestra que f es integrable en D y $\lim_{n\to\infty} \int_D f_n d\mu = \int_D f d\mu$.