ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES - 2020 - 1. TAREA 8

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes, 19 de noviembre
Antes de las 11:10 AM 100%
Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: (Evans 4.7) Usa separación de variables para encontrar una solución no-trivial de la EDP

$$u_{x_1}^2 u_{x_1x_1} + 2u_{x_1}u_{x_2}u_{x_1x_2} + u_{x_2}^2 u_{x_2x_2} = 0 \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Problema 2: (Evans 4.7) Considera la ecuación de Laplace $\nabla u = 0$ en $\mathbb{R}^2$, tomando con los datos de Cauchy

$$u = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{n}\sin(nx_1) \text{ en } \{x_2 = 0\}.$$

Emplea la separación de variables para derivar la solución

$$u = \frac{1}{n^2}\sin(nx_1)\sinh(nx_2).$$

Qué le pasa a u cuando $n \to \infty$? Está bien planteado el problema de Cuachy para la ecuación de Laplace? *Este ejemplo se debe a Hadamard.*

Problema 3: (Evans 4.7) Considera la ley de conservación viscosa

$$u_t + F(u)_x - au_{xx} = 0 \text{ en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{0.0.1}$$

con $a > 0$ y F uniformemente convexa.

(i) Muestra que u resuelve (0.0.1) si $u(x, t) = v(x - \sigma t)$ y v se define implícitamente por la fórmula

$$s = \int_c^{v(s)} \frac{a}{F(x) - \sigma z + b} dz, \quad s \in \mathbb{R},$$

donde b y c son constantes.

(ii) Demuestra que se puede encontrar una onda viajera que satisfaga

$$\lim_{s\to-\infty} v(s) = u_\ell, \lim_{s\to\infty} v(s) = u_r$$

con $u_\ell > u_r$, sí y solo sí se satisfacen las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$\sigma = \frac{F(u_r) - F(u_\ell)}{u_r - u_\ell}.$$

(iii) Sea u^ϵ la onda viajera de arriba que resuelve (0.0.1) para $a = \epsilon$, con $a^\epsilon(0, 0) = \frac{u_\ell + u_r}{2}$. Calcula $\lim_{\epsilon\to0} u^\epsilon$ y explica tu respuesta.