ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES - 2020 - 1. TAREA 7

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes, 12 de noviembre
Antes de las 11:10 AM 100%
Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera la ecuación hiperbólica escalar

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, -\infty < x < \infty,$$

conocida como ecuación de Burgers.

a) Usa el método de las características para resolver la ecuación de Burgers con condiciones iniciales:

$$u(x, t = 0) = \text{sign}(x) x^2 = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

y encuentra la formula explícita de la solución.

b) Considera ahora la condición inicial $u(x, t = 0) = x^2$. Puedes encontrar una solución para todo tiempo t? Encuéntrala.

Problema 2: Supongamos que $f(0) = 0$, u es una solución integral continua de la ley de conservación hiperbólica

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u &= g \quad \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

y u tiene soporte compacto en $\mathbb{R} \times [0, \infty]$. Demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\cdot, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g dx.$$

Problema 3: Calcula la única solución de entropía de

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u &= g \quad \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$