ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES - 2020 - 1. TAREA 1

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Jueves, 26 de septiembre

Antes de las 11:10 AM 100%

Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM 80%

No se aceptarán tareas después de las 5 PM

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1 Sea u un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$ y sea u solución de

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ en } U \\ u &= g \text{ en } \partial U, \end{cases}$$

donde $g \geq 0$. Demuestra que u es positiva en todo U si g es positiva en algún punto de ∂U.

Problema 2 (Evans 2.5): Usa la fórmula de Poisson en la bola para demostrar que

$$r^{n-2}\frac{r-|x|}{(1+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2}\frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}u(0)$$

siempre que u sea positive y armónica en $B^o(0,r)$. Esta es una forma explícita de la desigualdad de Harnack.

Problema 3 (Evans 2.5): Sea u la solución de

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \text{ en } \mathbb{R}^n_+ \\ u &= g \text{ en } \partial \mathbb{R}^n_+, \end{cases}$$

dada por la fórmula de Poisson en el semi-espacio superior. Supongamos que g es acotada y $g(x) = |x|$ para $x \in \partial \mathbb{R}^n_+, |x| \leq 1$. Muestra que ∇u es no acotada cerca de $x = 0$. *Sugerencia:* Estima $\frac{u(\lambda e_n) - u(0)}{\lambda}$.

Problema 4 (Evans 2.5): Sea $U^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1, x_n > 0\}$ la semi-bola abierta. Supongamos que $u \in C(\bar{U}^+)$ es armónica en U^+, con $u = 0$ en $\partial U^+ \cap \{x_n = 0\}$. Sea

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x_n \geq 0, \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) & \text{si } x_n < 0, \end{cases}$$

para $x \in U = B^o(0,1)$. Prueba que v es armónica en U.