ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES - 2020 - 1. TAREA 1

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes, 3 de septiembre
Antes de las 11:10 AM 100%
Después de las 11:10 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera el problema

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{x}\partial_x u & = & 0, \qquad -\infty < x < \infty \\ \\ u(x,0) & = & x^2, \end{cases}$$

que corresponde a una ecuación de transporte con coeficiente variable $a(x) = 1/x$. La velocidad de transporte $a(x)$ tiene una singularidad en $x = 0$.

(a) Encuentra la solución exacta del problema de valor inicial anterior.
(b) Grafica las curvas características $(x(t), t)$ en donde la solución $u(x(t), t) = u_o(x_o)$ es independiente de t.
(c) Explica si cada (x, t) existe un punto inicial x_o tal que $x(0) = x_o$, $x(t) = x$.

Problema 2: Encuentra todas las posibles soluciones estacionarias de la ecuación del calor

$$\partial_t u = \partial_x(k(x)\partial_x u),$$

con coeficientes de viscosidad que dependen de la variable x. Encuentra todas las soluciones estacionarias para $k(x) = e^{-x}$.

Problema 3: Considera la ecuación del calor

$$\begin{cases} \partial_t u & = & k(t)\partial_x^2 u, 0 \leq x \leq L \\ u(x,0) & = & u_o(x) \\ u(x,t) & & \text{periódica en } [0, L] \end{cases}$$

en donde el coeficiente de conductividad $k = k(t)$ es una función del tiempo. Usando series de Fourier $u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) e^{\frac{2\pi i k}{L}x}$, encuentra la solución general para el problema de frontera de arriba.

Problema 4: Define $k(t) = e^{-t}$ para el problema anterior. En este caso, la conductividad decae exponencialmente con el tiempo. Analiza el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$.