Tarea 5 Fundamentos de Matemáticas para Materiales

Problema 1: Dadas las superficies

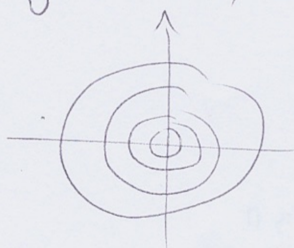
(1) $z = x^2 + y^2$ y (2) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9}$

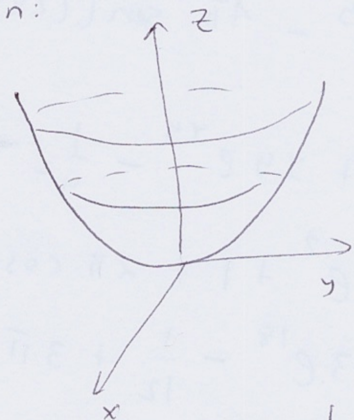
obten las curvas de nivel y un bosquejo de su gráfica.

R:

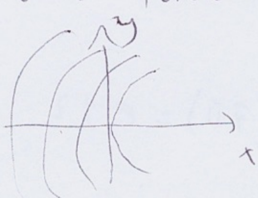
(1) Para $z = z_0 \geq 0$ fijo, la curva de nivel es un círculo con centro en el origen y radio $\sqrt{z_0}$.

$\Rightarrow$ La gráfica y curvas de nivel son:

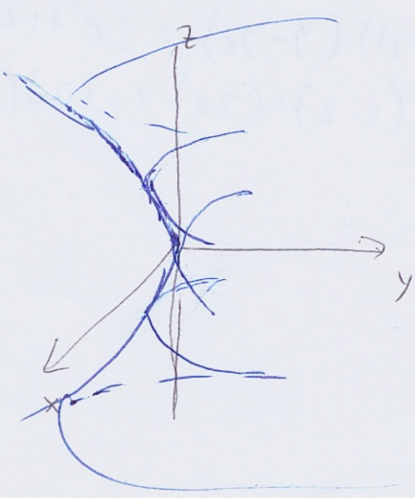




(2): Para un $y = y_0$ fijo, las curvas de nivel son hipérbolas. Sin embargo, si lo queremos ver para un $z = z_0$ fijo, la curva de nivel en el plano $x-y$ es una función cuadrática de y en x. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{z_0^2}{9}$



La gráfica se ve entonces como:



Problema 2: Se considera la función:

$$f(x,y) = e^{xy} + \frac{x}{y} + \text{sen}((2x+3y)\pi)$$

Calcular:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy} + \frac{1}{y} + 2\pi \cos((2x+3y)\pi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy} - \frac{x}{y^2} + 3\pi \cos((2x+3y)\pi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} - 4\pi^2 \text{sen}((2x+3y)\pi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xy e^{xy} - \frac{1}{y^2} - 6\pi^2 \text{sen}((2x+3y)\pi)$$

$$f_x(2,1) = e^2 + 1 + 2\pi \cos(7\pi) = e^2 + 1 - 2\pi$$

$$f_y(3,6) = 3e^{18} - \frac{1}{12} + 3\pi \cos(24\pi) = 3e^{18} - \frac{1}{12} + 3\pi$$

$$f_{xx}(2,1) = e^2 - 4\pi^2 \text{sen}(7\pi) = e^2$$

$$f_y(2,1) = 2e^2 - 2 + 3\pi \cos(7\pi)$$
$$= e^2 - 2 - 3\pi$$

$$f_{xy}(0,1) = 1 + 0 - 1 - 6\pi^2 \text{sen}(3\pi) = 0$$

Problema 3: Dada la función del problema anterior, calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(2,1)$

En $(x_0, y_0) = (2,1)$, $z_0 = f(x_0, y_0) = e^2 + 2 + \text{sen}(7\pi) = e^2 + 2$

La ecuación del plano tangente es:

$$z - z_0 = f_x(2,1)(x - x_0) + f_y(2,1)(y - y_0) = (e^2 + 1 - 2\pi)(x-2) + (2e^2 - 2 - 3\pi)(y-1)$$

$$\Rightarrow \quad z = e^2 + 2 + (e^2 + 1 - 2\pi)(x-2) + (2e^2 - 2 - 3\pi)(y-1)$$

Problema 4: Dada la función $z = Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4$, probar que $xz_x + yz_y = 4z$.

R: $z_x = 4Ax^3 + 4Bxy^2 = 4x(Ax^2 + By^2)$

$xz_x = 4x^2(Ax^2 + By^2)$

$z_y = 4Bx^2y + 4Cy^3 = 4y(Bx^2 + Cy^2)$

$yz_y = 4y^2(Bx^2 + Cy^2)$

$xz_x + yz_y = 4Ax^4 + 4Bx^2y^2 + 4Bx^2y^2 + 4Cy^4 = 4z.$

Problema 5: Sea $z = \ln(x^2+y)$. Comprobar que $z_{xy} = z_{yx}$ en los puntos en donde tenga sentido.

R: La relación anterior tiene sentido cuando $x^2 + y > 0$.

En esos casos:

$z_x = \dfrac{2x}{x^2+y} \Rightarrow z_{xy} = \partial_y(z_x) = \dfrac{-2x}{(x^2+y)^2}$

$z_y = \dfrac{1}{x^2+y} \Rightarrow z_{yx} = \partial_x(z_y) = -\dfrac{2x}{(x^2+y)^2}.$

$\Rightarrow z_{xy} = z_{yx}.$

Problema 6: Probar que la función $z = \arctan(y/x)$ satisface la ecuación de Laplace $z_{xx} + z_{yy} = 0$

R: Sabemos que $\dfrac{d}{dx}(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}.$

$\Rightarrow z_x = \dfrac{1}{1+(y/x)^2}\left(-y/x^2\right) = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow z_{xx} = \dfrac{-y(-2x)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2yx}{(x^2+y^2)^2}$

$z_y = \dfrac{1}{1+(y/x)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow z_{yy} = \dfrac{x(-2y)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow z_{xx} + z_{yy} = 0.$