Fundamentos de Matematicas para Materiales ⟷ Tarea 4 0913. 2012

Problema 1: Encuentra la serie de Taylor de las siguientes funciones al rededor de los puntos x_0 dados

(a) $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$, $x_0 = 0$

R: Primero $g(x) = sen(x)$

$g(0)=0$ $g'(x) = \cos(x)$ $g''(x) = -sen(x)$ $g'''(x) = -\cos(x)$ $g^{(iv)}(x) =$

y de ahí se repite

$\Rightarrow g(0) = 0,\ g'(0) = 1,\ g''(0) = 0,\ g'''(0) = -1$

$\Rightarrow sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{sen(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$

(b) $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $f''(x) = (-1)x^{-2}$, $f'''(x) = (-1)^2 2!\, x^{-3}$

$\dots f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$

$\Rightarrow \ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$.

(c) $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 0$

$= \sum \frac{1}{n!} (x^2)^n = \sum \frac{1}{n!} x^{2n}$

Problema 2: Hallar el periodo de la función

$f(x) = sen\left(\frac{2\pi}{b-a} x\right)$, $b > a$

Periodo: p $\frac{2\pi}{b-a} p$ debe ser multiplo de 2π $\Rightarrow p = b-a$.

Problema 3: Mostrar que si $f(x)$ tiene periodo p, $\alpha > 0$ $f(\alpha x)$ tiene periodo p/α.

R: $g(x) = f(\alpha x)$

$$g(x + p/\alpha) = f(\alpha(x + p/\alpha)) = f(\alpha x + p) = f(\alpha x) = g(x)$$

$\therefore$ g tiene periodo p/α.

Problema 4: Prueba la ortogonalidad de la base

$$\{1, \cos(x), \operatorname{sen}(x), \ldots, \cos(kx), \operatorname{sen}(kx), \ldots\}.$$

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha)$$

$$e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i\operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$\Rightarrow \cos(kx)\operatorname{sen}(mx) = \frac{1}{4i}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)\left(e^{imx} - e^{-imx}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left[e^{i(k+m)x} - e^{-i(k+m)x} + e^{-i(k-m)x} - e^{i(k-m)x}\right]$$

Al integrar de 0 a 2π, la integral se cancela, a menos que $k = m$.

Los otros casos son similares.

Problema 5: Encontrar la serie de Fourier para la función:

$$f(x) = \cos^2(x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

R: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \Rightarrow \cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$

$$\Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{\pi}x\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{\pi}x} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{2\pi}{\pi}x}.$$

0913.2

Problema 6: Determinar la serie de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ \pi/2 & \text{si } 0 < x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < x \leq \pi . \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-\frac{2\pi i}{2\pi} n x}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\, e^{-inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{in} e^{-inx} \Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{1}{4in}\left(e^{-i\frac{n\pi}{2}} - 1\right)$$