0906.
2017

Fundamentos de Matemáticas para Materiales

Problema 1: Usando integral por partes, resuelve;

- $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$.

- $\int x \cos x \, dx = x \,\text{sen}\, x - \int \text{sen}\, x \, dx = x \,\text{sen}\, x + \cos x$

- $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x$

- $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3}$

  $= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3$

- $\int \sqrt{x} \ln x \, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} \ln x - \int \frac{x^{3/2}}{3/2} \frac{1}{x} dx$

  $= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2}$

Problema 2: Muestra que $e^{-x} = O(x^{-n})$ para cualquier número n arbitrariamente alto.

Aplicando l'Hôpital, obtenemos

$$\frac{e^{-x}}{x^{-n}} = \frac{x^n}{e^x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{n x^{n-1}}{e^x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{n!}{e^x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

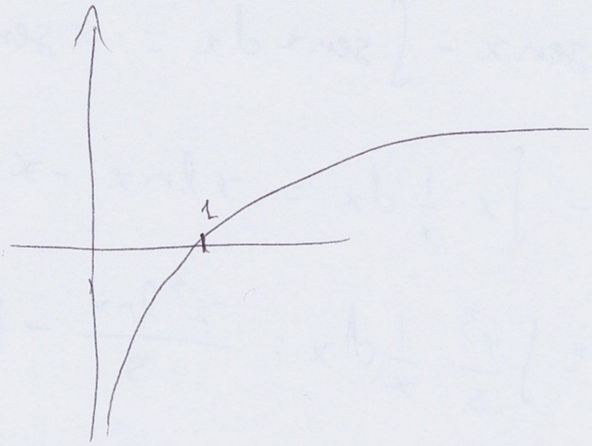
Por lo tanto, $e^{-x} = O(x^{-n})$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Problema 3: Muestra la gráfica de $\ln x$ para $0<x<\infty$.

Muestra que $\ln x = O(x^{-a})$ para $x \to 0$ y a cualquier número arbitrario positivo.

$$\frac{\ln x}{x^{-a}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1/x}{-a\, x^{-a-1}} = -\frac{1}{a} x^{a} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{si } a>0$$

Gráfica



Problema 4: Estima n tal que la integración $\int^{2} x^{-1/2} e^{-x}\, dx$ es hecha con la regla trapezoidal (exacta si f es lineal) es precisa hasta por un error de $\pm 10^{-5}$. La regla trapezoidal es $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \Delta x \frac{f_0+f_1}{2}$

Respuesta: De acuerdo al código adjunto, $n=20$.

Muestra que la regla de Simpson $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{\Delta x\,(f_0+4f_1+f}{3}$ es exacta si f es cuadrática

Respuesta: Sea $f(x) = \alpha(x-a)^2+\beta$

Un calculo directo muestra que:

$$\Delta x\,\frac{f(x)+4f(x+\Delta x)+f(x+2\Delta x)}{3} = 2\Delta x\,\beta + 2\alpha\Delta x(x-a)^2 + 4\alpha\Delta x^2(x-a) + \frac{8}{3}\alpha\Delta x^3$$

Por otro lado

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2\beta\Delta x + \frac{\alpha(x'-a)^3}{3}\Big|_{x'=x}^{x'=x+2\Delta x} = 2\Delta x\,\beta + \frac{1}{3}\alpha\left((x-a+2\Delta x)^3-(x-a)^3\right)$$

$$= 2\Delta x\,\beta + \frac{\alpha}{3}\left((x-a)^3 + 6\Delta x(x-a)^2 + 12(x-a)\Delta x^2 + 8\Delta x^3 - (x-a)^3\right),$$ lo cual coincide.