0403.1
2017

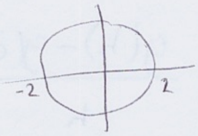
Tarea 1

Fundamentos de Matemáticas Para Materiales

Problema 1: Determina si $x^2+y^2=4$ define una función $y(x)$ sobre $|x|\leq 2$. Explica.

Respuesta: $x^2+y^2=4$ define un círculo con centro en el origen y radio 2.

Para que la ecuación de arriba defina una función, para cada x debe existir una sola y



Para cada $x \in [-2,2]$, tenemos $y=\pm\sqrt{4-x^2}$

si $|x|<2$, tenemos dos valores de y. Es por esto que no define una función.

Problema 2: La función Heaviside es $H(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$.

Debemos mostrar que $\int H(x)dx = xH(x)+C$

y graficar $H(x)$, $xH(x)$, $H(x-a)$

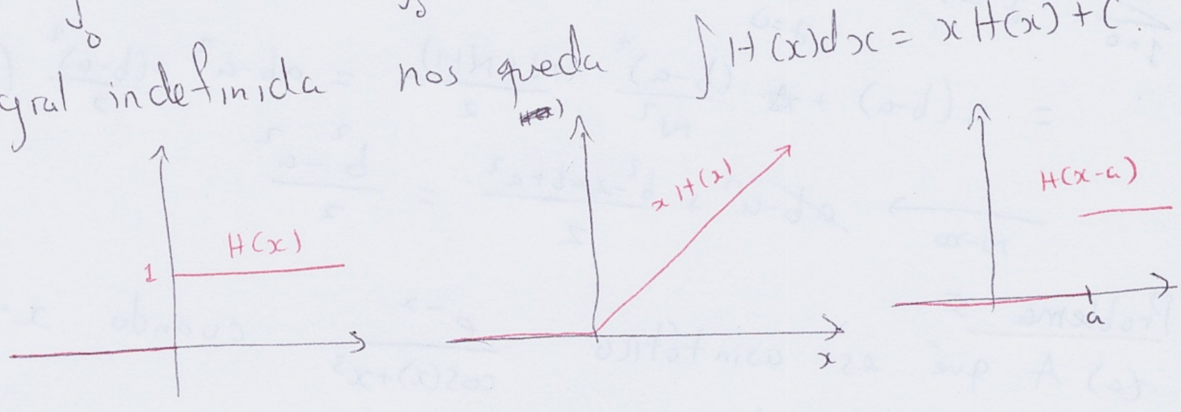
Respuesta: Calculemos la integral definida $\int_0^x H(x')dx'$.

Si $x<0 \Rightarrow \int_0^x H(x')dx' = -\int_x^0 H(x')dx' = 0 = xH(x)$

Si $x\geq 0 \Rightarrow \int_0^x H(x')dx' = \int_0^x 1\,dx' = x = xH(x)$

Para la integral indefinida nos queda $\int H(x)dx = xH(x)+C$.

Gráficas:



Problema 3: Muestra que para $g(x)=\begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$

$g'(x)$ existe en $x=0$ pero no es continua ahí.

Respuesta: Para $x\neq 0$

$$g'(x) = 2x \operatorname{sen}\tfrac{1}{x} + x^2\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)\left(-x^{-2}\right)$$
$$= 2x\operatorname{sen}\tfrac{1}{x} - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

Para $x=0$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}\tfrac{1}{h} = 0 \text{ , pues } \left|h\operatorname{sen}\tfrac{1}{h}\right| \le \tfrac{1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Sin embargo, $2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ pero $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ oscila y su límite no existe.

$\therefore g'(0)=0$ pero $\lim_{x\to 0} g'(x)$ no existe.

Problema 4: Muestra directamente (con sumas de Riemann) que $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$

Tomemos una partición con N subintervalos uniformes

$$x_0=a, \ldots, x_j = a+\Delta x\cdot(j), \ldots, x_N = b \qquad \Delta x = \frac{b-a}{N}$$

$$\sum_{j=0}^{N} x_j\,\Delta x = \sum_{j=0}^{N}(a+j\Delta x)\Delta x = aN\Delta x + \Delta x^2\sum_{j=0}^{N} j$$
$$= a(b-a) + \cancel{\Delta}\frac{(b-a)^2}{N^2}\,\frac{N(N+1)}{2} = ab-a^2 + \frac{(b-a)^2}{2}\left(1+\frac{1}{N}\right)$$
$$\xrightarrow[N\to\infty]{} ab-a^2 + \frac{b^2-2ab+a^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Problema 5

(a) A qué es asintótico $\frac{e^{-x}}{\cos(x)+x^3}$ cuando $x\to 0$?

R: Tomando los límites:

$$\frac{e^{-x}}{\cos(x)+x^3} \longrightarrow \frac{e^{-0}}{1+0} = 1$$

(0905.)

(b) Proporciona las expresiones asintóticas para
$$\frac{3x-\sqrt{x^2+2}}{\cos x + x^3}$$ cuando $x \to \infty$ y $x \to 0$.

R: Cuando $x \to \infty$ $$\frac{3x-\sqrt{x^2+2}}{\cos x + x^3} = \frac{3-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{\frac{\cos x}{x}+x^2}$$

$$\sim \frac{3-\sqrt{1}}{0+x^2} = \frac{2}{x^2}$$

Cuando $x \to 0$ $$\frac{3x-\sqrt{x^2+2}}{\cos(x)+x^3} \longrightarrow \frac{3\cdot 0-\sqrt{2}}{1+0} = -\sqrt{2}$$