

ANÁLISIS REAL I - 2017. TAREA 9

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes 23 de octubre

Antes de las 11:40 AM 100%

Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%

No se aceptarán tareas después de las 5 PM

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Sea f una función compleja arbitraria en \mathbb{R}^1 , y define

$$\varphi(x, \delta) = \sup \{|f(s) - f(t)| : s, t \in (x - \delta, x + \delta)\},$$
$$\varphi(x) = \inf \{\varphi(x, \delta) : \delta > 0\}.$$

Demuestra que φ es semicontinua por arriba, que f es continua en un punto x si y solo si $\varphi(x) = 0$

Problema 2: Construye un conjunto compacto totalmente desconexo $K \subset \mathbb{R}^1$ tal que $m(K) > 0$. (K debe no tener subconjuntos conexos de mas de un punto.)

Problema 3: Si $0 < \epsilon < 1$, construye un conjunto abierto $E \subset [0, 1]$ que sea denso en $[0, 1]$ tal que $m(E) = \epsilon$.

Problema 4: Construye un conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}^1$ tal que

$$0 < m(E \cap I) < m(I)$$

para cada segmento no vacío I . Es posible que $m(E) < \infty$ para tal conjunto?

Problema 5:

(i) Encuentra la constante más pequeña tal que

$$\log(1 + e^t) < c + t \quad (0 < t < \infty)$$

(ii) Evalúa si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \log(1 + e^{nf(x)}) dx$$

existe para cada función real valuada $f \in L^1$. Si existe, cual es su límite?