ANÁLISIS REAL I - 2017. TAREA 7

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes 9 de octubre
Antes de las 11:40 AM 100%
Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considere la siguiente función

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 2x+2 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}.$$

Es sabido que g, por ser una función no decreciente continua por la izquierda, genera unívocamente a una medida boleriana en $\mathbb{R}$ que denotaremos por μ. Encuentre la descomposición de Lebesque de μ.

Problema 2: Sea $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, \mu)$ un espacio con medida, donde $\mathfrak{L}$ es la $\sigma-$álgebra donde está definida la medida de Lebesgue λ y existe $C > 0$ tal que $\mu \leq C\lambda$. Demuestre que si f es integrable (o sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, \mu)$), entonces la función

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f d\mu$$

es continua.

Problema 3: En un espacio de medida positiva (X, μ), sean $h : X \to [0, \infty)$ una función integrable, f_n y f medibles de X en $\mathbb{R}$ tales que $f_n \geq -h$ para toda n y $f_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$, para toda $x \in X$. Muestra que existen las integrales $\int f_n d\mu$ para toda n y $\int f d\mu$, y que se cumple

$$\int f d\mu \leq \lim \inf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Sugerencia: Mostrar que $f^- \leq h$.

Problema 4: Sea (X, μ) un espacio de medida positiva. Si $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ son funciones medibles, por definición $f_n \to f$ en medida si

$$E_n(\alpha) := \{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$$

satisface $\mu(E_n(\alpha)) \to 0$ cuando $n \to \infty$, para toda $\alpha > 0$. Define para $f : X \to \mathbb{R}$ medible:

$$q(f) := \int_X \frac{|f|}{1 + |f|} d\mu.$$

Muestra que si $\mu(X) < \infty$, entonces $f_n \to f$ en medida si y sólo su $q(f_n - f) \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Sugerencia: Investigar primero la monotonía del mapeo $s \mapsto s/(1 + 2)$ en $[0, \infty]$.

Problema 5: Sea X un conjunto no numerable, y sea $\mathcal{A} \subset 2^X$ la $\sigma-$álgebra de subconjuntons de X definida por: $A \in \mathcal{A}$ si y sólo su A es numerable o $X \setminus A$ es numerable. Sea $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{N}_o \cup \{\infty\}$ la medida respectiva que cuenta (ver definición en la referencia de *Rudin*). Sea λ la medida en $\mathcal{A}$ tal que $\lambda(A) = 0$ si A es numerable y $\lambda(A) = \infty$ si A no lo es. Muestra que $\lambda << \mu$, es decir, λ es absolutamente continua con respecto a μ, pero que la conclusión del teorema de Radon-Nikodým no es valida.