ANÁLISIS REAL I - 2017. TAREA 5

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes 25 de septiembre
Antes de las 11:40 AM 100%
Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Determina si existe una $\sigma-$álgebra que tenga solo un número contable de miembros.
Problema 2: Demuestra que si f es una función real-valuada en un espacio medible X tal que $\{x : f(x) \geq r\}$ es medible para cada racional r, entonces f es medible.
Problema 3:

(a) Supongamos que $f : X \to [-\infty, \infty]$ y $g : X \to [-\infty, \infty]$ son medibles. Prueba que los conjuntos
$$\{x : f(x) < g(x)\}, \{x : f(x) = g(x)\}.$$
son medibles.

(b) Prueba que el conjunto de puntos en los cuales un conjuntos de funciones real-valuadas medibles convergen (a un límite finito) es medible.

Problema 4: Sea X un conjunto no contable y $\mathfrak{M}$ la colección de todos los conjuntos E tales que ya sea E o $X \setminus E$ son a lo más contables. Define $\mu(E) = 0$ en el primer caso y $\mu(E) = 1$ en el segundo. Demuestra que $\mathfrak{M}$ es una $\sigma-$álgebra en X y que μ es una medida en $\mathfrak{M}$. Describe las correspondientes funciones medibles y sus integrales.
Problema 5: Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k : X \to \mathbb{C}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones medibles que converge a una función f. Pruebe que existe una subsucesión $\left\{f_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ que converge casi uniformemente (por lo tanto converge casi siempre) a f.
(Esta afirmación se puede demostrar si tomamos los elementos de la subsucesión f_{k_j} de forma tal que el conjunto de $x \in X$ tales que $|f_{k_j}(x) - f(x)| > j^{-1}$ tenga medida suficientemente pequeña).
Recordemos que la sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k : X \to \mathbb{C}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, de funciones $\mu-$medibles converge a f en medida μ si para cada $\epsilon > 0$ la sucesión de números
$$\{\mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon|\})\}_{k=1}^{\infty}$$
converge a 0 cuando n tiene a infinito. Por otra parte $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ converge a f $\mu-$cais uniformemente si para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto medible E que satisface $\mu(E) < \epsilon$ y tal que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a f uniformemente en $X \setminus E$.
Problema 6: Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada, entonces para cualquier c en (a, b) existen los límites
$$\lim_{x \to c^-} f(x), \lim_{x \to c^+} f(x).$$

(b) Una función monótona puede tener sólo una cantidad numerable de discontinuidades.

Recuerde que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si

$$sup_{\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{m(\mathcal{P})} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty,$$

donde cada partición $\mathcal{P}$ está dada por los puntos $\left\{x_o, x_1, \ldots, x_{m(\mathcal{P})}\right\}$ tales que $a = x_o < x_1 < \ldots < x_{m(\mathcal{P})} = b$.