

ANÁLISIS REAL I - 2017. TAREA 4

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes 11 de septiembre

Antes de las 11:40 AM 100%

Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%

No se aceptarán tareas después de las 5 PM

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Determina si la función

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

es uniformemente continua en \mathbb{R} .

Problema 2: Encuentra funciones continuas $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ donde $f_n \rightarrow 0$ puntualmente pero no uniformemente cuando $n \rightarrow \infty$. *Sugerencia:* Sea $f_n(1/n) = 1, f_n(0) = f_n(2/n) = 0$. (Esto muestra porque la convergencia monótona, $f_n \rightarrow f_0$, es útil en el teorema de Dini).

Problema 3: Muestra de manera directa que las funciones $f_n(x) = x^n$ en $[0, 1]$ no son equicontinuas en 1 (sin aplicar los teoremas).

Problema 4: Muestra que las funciones $x \mapsto \sin(nx)$ en $[0, 1]$ para $n = 1, 2, \dots$, no son equicontinuas en 0.

Problema 5: Muestra que la cerradura de un conjunto que es denso en ninguna parte es denso en ninguna parte.

Problema 6: Muestra que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, con la topología relativa usual es topológicamente completo. Define una métrica completa para $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con la topología relativa usual.