ANÁLISIS REAL I - 2017. TAREA 3

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 4 de septiembre
Antes de las 11:40 AM 100%
Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Sean (X, τ) y $(Y, \mathcal{U})$ espacios topológicos y $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bases para las topologías $\tau, \mathcal{U}$ respectivamente. Muestra que la colección de conjuntos $A \times B$ para $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ es una base para la topología producto en $X \times Y$.

Problema 2: Sea f una función real-valuada y acotada en X. Es decir, para algún $M < \infty, f[X] \subset [-M, M]$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en X. Muestra que $\{f[A] : A \in \mathcal{U}\}$ es una base filtro convergente.

Problema 3: Sea (S, τ) un espacio topológico. Se dice que S es conexo si S no es la unión de dos conjuntos abiertos no-vacíos disjuntos.

(a) Demuestra que si S es conexo y f es una función contínua suprayectiva de S en T, entonces T también es conexo.
(b) Demuestra que para cada $a < b$ en $\mathbb{R}$, $[a, b]$ es conexo. *Sugerencia:* Supongamos que $[a, b] = U \cup V$ para dos abiertos relativos disjuntos no vacíos U, V. Supongamos que $c \in U$ y $d \in V$ con $c < d$. Sea $t := sup\,(U \cap [c, d])$. Entonces $t \in U$ o $t \in V$ nos da una contradicción.
(c) Si $S \subset \mathbb{R}$ es conexo y $c < d, c, d \in S$, muestra que $[c, d] \subset S$. *Sugerencia:* Supongamos que $c < t < s$ y $t \notin S$. Consideremos $(-\infty, t) \cap S$ y $(t, \infty) \cap S$.
(d) (Teorema de valor medio). Sea $a < b$ en $\mathbb{R}$ y sea f una función contínua de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. Muestra que f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. *Sugerencia:* Aplica las partes (a), (b) y (c).

Problema 4: Muestra que cualquier cubierta abierta de un espacio métrico separable tiene una subcobierta numerable.

Problema 5: Un punto x en un espacio topológico se llama aislado sii $\{x\}$ es abierto. Un espacio topológico compacto se llama perfecto sii no tiene puntos aislados. Muestra que

(a) Cualquier espacio métrico compacto es la unión de un conjunto contable y un conjunto perfecto. *Sugerencia:* Considera el conjunto de todos los puntos que tienen una vecindad abierta contable y usa el problema anterior.
(b) Si (K, d) es perfecto, entonces cualquier subconjunto no vacío abierto de K es no-contable.