ANÁLISIS REAL I - 2017. TAREA 2

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 28 de agosto
Antes de las 11:40 AM 100%
Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: En $\mathbb{R}^2$ see

$$d(\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle) := \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

la métrica usual, y

$$e(\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle) : |x-u| + |y-v|.$$

Muestra que e es una métrica y metriza la misma topología que d.

Problema 2: Para cualquier espacio topológico (X, τ) y conjunto $A \subset X$. La frontera de A se define como $\partial A := \overline{A} \setminus intA$. Muestra que la frontera de A es un conjunto cerrado y es la misma que la de $X \setminus A$. Muestra que para cualesquier $A, B \subset X$, tenemos

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

Da un ejemplo en donde $\partial(A \cup B) \neq \partial A \cup \partial B$.

Problema 3: Sea (S, d) un espacio métrico y X un subconjunto de S. Denotemos también por d la restricción a $X \times X$. Muestra que la topología en X metrizada por d es la misma que la topología relativa de la topología metrizada por d en S.

Problema 4: Muestra que cualquier subconjunto de una espacio métrico separable también es separable con la topología relativa.

Problema 5: Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Muestra que la integral de Riemann de la función indicadora $1_{\mathbb{Q}}$ de 0 a 1 está indefinida. La integral de Lebesgue (que veremos más adelante) de esta función es cero.

Problema 6: sea X un conjunto infinito. Sea τ la colección del conjunto vacío y de los complementos de subconjuntos finitos de X. Muestra que τ es una topología en la que cada conjunto de la forma $\{x\}$ es cerrado, pero τ no es metrizable. *Sugerencia:* Notar que una sucesión de puntos distintos converge a cada punto.