ANÁLISIS REAL I - 2017. TAREA 12

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes 21 de noviembre
Antes de las 11:40 AM 100%
Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Resolver 10 de los siguientes 15 problemas de exámenes generales.

Problema 1: Una forma de enunciar el teorema de Egorov es la siguiente: Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones reales medibles que converge (puntualmente) casi siempre en $\mathcal{A}$ (donde $\mathcal{A}$ es de medida finita) a una función f, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un conjunto $\mathcal{B}$ de medida menor que ϵ tal que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Para la medida de Lebesgue, demuestre, construyendo un contraejemplo, que la hipótesis de que la medida de $\mathcal{A}$ es finita es necesaria.
Problema 2: Demuestre que la función ternaria de Cantor no es absolutamente continua.
Problema 13 La siguiente afirmación es un caso particular de un teorema perteneciente a Luisin; demuéstrela. Si f es una función en $L^1(\mathbb{R})$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ hay un conjunto $\mathcal{B}$ de medida de Lebesgue no mayor que ϵ tal que la función

$$f\big|_{\mathbb{R}\setminus\mathcal{B}}$$

es continua. *Sugerencia:* Usar la desigualdad de Markov.
Problema 4: Sea μ la medida definida en los borelianos de $\mathbb{R}$ tal que para cualesquiera a, b con $a < b, \mu[a, b) = b - a$. (Como la $\sigma-$álgebra donde está definida μ son borelianos, la medida se llama boreliana).

(a) Demostrar que, en los borelianos de $\mathbb{R}$, μ coincide con la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
b) Cuáles son los conjuntos que están en la $\sigma-$algebra donde está definida la medida de Lebesgue que no son borelianos? Indique un algoritmo que permita extender μ a la medida de Lebesgue

Problema 5: Sea$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones absolutamente continuas. Demuestre que para ellas tiene lugar la fórmula de integración por partes:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'g d\lambda + \int_a^b fg'd\lambda,$$

donde λ es la medida de Lebesgue. (Para demostrar este teorema se deben usar las propiedades de funciones absolutamente continuas).
Problema 6: Pruebe la siguiente afirmación (Conversión del Teorema de Egorov): Sea (X, μ) un espacio medible con medida finita y sean $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, funciones μ-medibles. Supongamos que para toda $\epsilon > 0$ existe un conjunto μ-medible B_ϵ tal que $\mu(B_\epsilon) < \epsilon$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en $X \setminus B_\epsilon$. Entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f $\mu-$ casi en todas partes. (Esta afirmación se

puede demostrar construyendo una sucesión de conjuntos medibles de medida decreciente en cuyo complemento la sucesión de funciones converge uniformemente).

Problema 7: Sea (X, μ) un espacio medible y sean $f_n, n \in \mathbb{N}$, funciones $\mu-$ medibles. Supongamos que existe una función integrable g tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ μ-c.s. en X. Demuestre que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente integrable. Recordemos que una colección $\mathcal{F}$ de funciones $\mu-$ medibles es uniformemente integrable si

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sum_{f\in\mathcal{F}}\int_{\{x:|f(x)|\geq t\}}|f|d\mu\right)=0.$$

(Para demostrar esta afirmación se utiliza el Teorema de convergencia dominada)

Problema 8: Sea $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ una función de Lebesgue integrable tal que

$$\int_o^t f(x)d\lambda(x) = 0, \text{ para toda } t \geq 0,$$

donde λ es la medida de Lebesque. Demuestre que entonces $f(x) = 0$ para casi toda x.

Sugerencia: Para esta demostración se puede utilizar las propiedades de la medidad exterior de Lebesgue y el Teorema de convergencia dominada.

Problema 9: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue integrable. Demuestre que

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(xt)d\lambda(x) = 0,$$

donde λ es la medida de Lebesgue.

Sugerencia: Para la demostración se puede utilizar el hecho de que cualquier función Lebesgue integrable se puede aproximar, en el sentido de la norma L^1, por funciones simples.

Problema 10: Sea (X, A, μ) un espacio con medida y sea $\phi : X \to Y$ una función tal que $\phi(X) = Y$. Demuestre que:

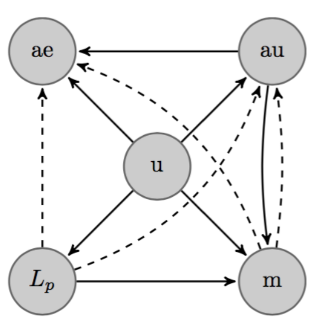
a) la familia de conjuntos $B := \{\delta \subset Y : \phi^{-1}(\delta) \in A\}$ es una $\sigma-$álgebra.
b) la función $\nu(\delta) := \mu(\phi^{-1}(\delta))$ es una medida en el espacio medible (Y, B) y, entonces, $f : Y \to \mathbb{R}$ es ν-medible si y sólo si $f \circ \phi$ es μ-medible.
c) $f \in L^1(Y, \nu)$ si y sólo si $f \circ \phi \in L^1(X, \mu)$ y se cumple que

$$\int_Y f\nu = \int_X (f \circ \phi)d\mu.$$

Problema 11: Sean μ_1, μ_2, μ_3 medidas en el espacio medible (X, A). Pruebe que:

a) $\mu_1 \prec (\mu_1 + \mu_2)$
b) Si $\mu_1 \prec \mu_3$ y $\mu_2 \prec \mu_3$, entonces $(\mu_1 + \mu_2) \prec \mu_3$.

Problema 12: En el siguiente diagrama Los círculos con las letras u, au, ae, m y L^p significan



convergencia uniforme, casi uniforme, casi siempre, en medida y en el espacio L^p, respectivamente.

Las flechas continuas significan implicación, mientras que las flecha punteadas significan que la implicación es válida para una subsucesión de la sucesión original. Considerando que la medida no es finita, indique cuál flecha es incorrecta en el diagrama y dé un contraejemplo.

Problema 13: Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua y monótona. Pruebe que si $E \subset [0,1]$ tiene medida de Lebesgue 0, entonces el conjunto $f(E)$ también tiene medida de Lebesgue 0. Esta implicación es una variante débil de la llamada propiedad N de Luzin. Recordemos que una función es absolutamente continua en $[0,1]$ si para cualquier $\epsilon > 0$, existe δ tal que para cualquier familia finita de intervalos (x_k, y_k) de $[0,1]$ que satisfacen

$$\sum_k |y_k?x_k| < \delta \text{ se cumple que} \sum_k |f(y_k)?f(x_k)| < \epsilon.$$

Problema 14: Sean $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_1, \mu)$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_2, \nu)$ dos espacios con medida y considérese las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que f es ν medible y g es ν medible.

a) Dé condiciones sobre $f, g, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ para que $f \circ g$ no sea ν medible.

b) Dé condiciones sobre $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ para que $f \circ g$ sea siempre medible (para cualesquiera f, g).

Problema 15: Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $L^p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$ que converge casi siempre a una función f en $L^p[0,1]$. Demuestre que si existe una constante M tal que $||f_n||_{L^p} \leq M$ para toda $n \in N$, entonces

$$\int fgd\lambda = \lim_{n\to\infty} f_n gd\lambda \forall g \in L^q[0,1] \; (p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

Sugerencia: Para demostrar esta afirmación uno puede ayudarse del Teorema de Egorov y de la desigualdad de Hölder.