ANÁLISIS REAL I - 2017. TAREA 11

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes 13 de noviembre
Antes de las 11:40 AM 100%
Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Si M es un sub-espacio cerrado de H (espacio de Hilbert), muestra que $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M$. Hay algún enunciado similar para sub-espacios M que no son necesariamente cerrados?

Problema 2: Sea $\{x_n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en H (espacio de Hilbert). Muestra que la siguiente construcción forma un conjunto ortonormal $\{u_n\}$ tal que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{u_n, \ldots, u_N\}$ generan (span) el mismo espacio. Sea $u_1 = x_1/||x_1||$. Teniendo $u_1, \ldots, u_{N-1}$ define

$$v_N = x_N - \sum_{i=1}^{N-1} \langle x_n, u_i \rangle u_i, u_N = v_N/||v_N||.$$

Nota: Esto prueba la existencia de un conjunto ortonormal maximal en un espacio de Hilbert separable sin usar el principio de maximalidad de Hausdorff.

Problema 3: Si $A \subset [0, 2\pi]$ y A es medible, prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \cos(nx)dx = \lim_{n\to\infty} \int_A \sin(nx)dx = 0.$$