

ANÁLISIS REAL I - 2017. TAREA 10

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes 6 de noviembre

Antes de las 11:40 AM 100%

Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%

No se aceptarán tareas después de las 5 PM

Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Supongamos que φ es una función real continua en (a, b) de tal forma que

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(y)$$

para toda $x, y \in (a, b)$. Demuestra que φ es convexa. (Esta conclusión no se sigue si la continuidad se omite de las hipótesis).

Problema 2: Supongamos que f es una función compleja medible en X , μ es una medida positiva en X , y

$$\varphi(p) = \int_X |f|^p d\mu = \|f\|_p^p. \quad (0 < p < \infty).$$

Sea $E = \{p : \varphi(p) < \infty\}$. Supongamos que $\|f\|_\infty > 0$.

- (a) Si $r < p < s, r \in E$, y $s \in E$, demuestra que $p \in E$.
- (b) Prueba que $\log \varphi$ es convexa en el interior de E y que φ es continua en E .
- (c) Por (a), E es conexo. Es E necesariamente abierto? Cerrado? Puede E consistir de un solo punto? Puede E ser cualquier subconjunto conexo de $(0, \infty)$?
- (d) Si $r < p < s$, demuestra que $\|f\|_p \leq \max(\|f\|_r, \|f\|_s)$. Muestra que esto implica la inclusión

$$L^r(\mu) \cap L^s(\mu) \subset L^p(\mu).$$

- (e) Supongamos que $\|f\|_r < \infty$ para algún $r < \infty$. Demuestra que

$$\|f\|_p \rightarrow \|f\|_\infty \text{ cuando } p \rightarrow \infty.$$

Problema 3: Supongamos, además de las hipótesis del problema 2, que $\mu(X) = 1$.

- (a) Demuestra que $\|f\|_r \leq \|f\|_s$ si $0 < r < s \leq \infty$.
- (b) Bajo que condiciones sucede que $0 < r < s \leq \infty$ y $\|f\|_r = \|f\|_s < \infty$?
- (c) Demuestra que $L^r(\mu) \supset L^s(\mu)$ si $0 < r < s$. Bajo qué condiciones esos dos espacios contienen las mismas funciones?
- (d) Supongamos que $\|f\|_r < \infty$ para algún $r > 0$. Demuestra que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|f\|_p = \exp \left\{ \int_X \log |f| d\mu \right\}$$

si $\exp(-\infty)$ se define como cero.

Problema 4: Supongamos que $f_n \in L^p(\mu), n = 1, 2, 3, \dots, \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ y $f_n \rightarrow g$ μ -c.t.p. cuando $n \rightarrow \infty$. Qué relación existe entre f y g ?

Problema 5: Supongamos que $\mu(\Omega) = 1$ y f, g son funciones medibles en Ω tal que $fg \geq 1$. Demuestra que $\int_\Omega f d\mu \int_\Omega g d\mu \geq 1$.