ANÁLISIS REAL I - 2017. TAREA 1

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Lunes, 21 de agosto
Antes de las 11:40 AM 100%
Después de las 11:40 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Sea $A_{1j} := \mathbb{R} \times [j-1, j], A_{2j} := [j-1, j] \times \mathbb{R}$ para $j = 1, 2$. Sea $B := \cup_{m=1}^{2} \cap_{n=1}^{2} A_{mn}$ y $C := \cap_{n=1}^{2} \cup_{m=1}^{2} A_{mn}$. Cual de las siguientes es verdadero: $B \subset C$ y/o $C \subset B$? Por que?

Problema 2: Sea $f(x) := \sin x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De los siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$, en cuales la función f es inyectiva o suprayectiva?

(a) $[-2, 2]$
(b) $[0, 1]$
(c) $[-1, 1]$
(d) $[-\pi, \pi]$

Problema 3: Líneas medias cerradas son subconjuntos de $\mathbb{R}$ de la forma $\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ ó $\{x \in \mathbb{R} : x \geq b\}$ para algún número real b.Un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ es una función

$$x \to a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o,$$

donde a_k son constantes reales. Muestra que el rango de cualquier polinomio de grado $n \geq 1$ es $\mathbb{R}$ para n impar y una línea media cerrada para n par.

Problema 4: Para dos conjuntos ordenados parcialmente $\langle A, \leq \rangle$ y $\langle B, \leq \rangle$, el orden lexicográfico en el producto cartesiano está definido por $\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle$ sii $a < c$ ó ($a = c$ y $b \leq d$). Si los órdenes en A y B son lineales, el orden lexicográfico es también lineal en $A \times B$. Si A y B están bien ordenados por tales relaciones, muestra que $A \times B$ está también bien ordenado.

Problema 5: En $\mathbb{R}^2$, sea $\langle x, y, \rangle E \langle u, v \rangle$ sii $x + y = u + v$, $\langle x, y, \rangle F \langle u, v \rangle$ sii $x + y \leq u + v$, y $\langle x, y, \rangle G \langle u, v \rangle$ sii $x + u \leq y + v$. Cuales de esas relaciones son relaciones de equivalentes, un orden parcial, o un orden lineal? Por qué?

Problema 6: Sea $(X, <)$ un conjunto bien ordenado. Sea $>$ el orden inverso, i.e., $x > y$ significa $y < x$. Supongamos que $(X, >)$ está también bien ordenado. Sea f una función de $\mathbb{N}$ en X. Muestra que f no puede ser una función biyectiva. *Sugerencia:* Si lo es, entonces define h por recursión en $\mathbb{N}$ tal que $h(0)$ es el elemento menor en X para $<$, $h(1)$ the próximo, y así sucesivamente. El rango de h no tiene elemento más grande.

Problema 7: Si X no es contable y además Y es un subconjunto contable de X, muestra que $X \setminus Y$ tiene la misma cardinalidad que X, suponiendo que $\mathbb{N}$ tiene cardinalidad menor que $X \setminus Y$ (lo cual no se puede demostrar sin el axioma de elección). *Sugerencia:* Sea B un subconjunto contable de $X \setminus Y$. Entonces B y $B \cup Y$ tienen la misma cardinalidad.

Problema 8: Sea X la colección de intervalos $[a, b]$ de longitud $0 \leq b - a \leq 2$, con la inclusión como orden parcial. Muestra que cada cadena en X tiene una cota superior.