

Análisis Real I
Posgrado en Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México
Examen 2

Profesor: Gerardo Hernández Dueñas

Octubre 31, 2017

- * POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA**
- * EXPLICA TU RESPUESTA E INCLUYE LOS DETALLES**

NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 9

TU NOMBRE:

Prob 1 /30	
Prob 2 /15	
Prob 3 /20	
Prob 4 /15	
Prob 5 /20	
Bono /10	
TOTAL /100+10	

Mucho éxito en su examen!
Feliz Halloween :)

Análisis Real I - Examen 2

Problema 1: Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio con medida y $D \in \mathcal{A}$ un conjunto medible. Sean $\{f_n\}, f$ funciones medibles. Se dice que $\{f_n\}$ converge en medida μ en D a f ($f_n \rightarrow^\mu f$) si para cada $\epsilon > 0$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x \in D : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = 0.$$

(a) Muestra que la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x \in D : |f_n(x) - f(x)| > 0\} = 0$$

implica que $f_n \rightarrow^\mu f$ en D .

(b) Muestra que la implicación converso no es cierta.

Análisis Real I - Examen 2

- (c) **(continuación del problema 1)** Muestra que la condición en (a) implica que para μ -c.t.p $x \in D$ tenemos $f_n(x) = f(x)$ para un número infinito de índices $n \in \mathbb{N}$.

Análisis Real I - Examen 2

Problema 2: Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones medibles real-valuadas no-negativas en \mathbb{R} tales que $f_n \rightarrow f$ μ -c.t.p. en \mathbb{R} . Supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\mu < \infty.$$

Muestra que para cada conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Análisis Real I - Examen 2

Problema 3: Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio con medida y $D \in \mathcal{A}$ un conjunto medible. Sea $\{f_n\}$ y f funciones medibles y real valuadas μ -c.t.p. en D . Supongamos que existe una sucesión de números positivos $\{\epsilon_n\}$ tales que

$$(1) \sum_{n \in \mathbb{N}} \epsilon_n < \infty$$

$$(2) \int_D |f_n - f| d\mu < \epsilon_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Muestra que la sucesión $\{f_n\}$ converge a f μ -c.t.p. en D .

Nota: No se supone integrabilidad de $f_n, f, |f|$.

Análisis Real I - Examen 2

Problema 4: Sea X un conjunto no numerable, y sea $\mathcal{A} \subset 2^X$ la σ -álgebra de subconjuntos de X definida por: $A \in \mathcal{A}$ si y sólo si A es numerable o $X \setminus A$ es numerable. Sea $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ la medida respectiva que cuenta. Sea λ la medida en \mathcal{A} tal que $\lambda(A) = 0$ si A es numerable y $\lambda(A) = \infty$ si A no lo es. Muestra que $\lambda \ll \mu$, es decir, λ es absolutamente continua con respecto a μ , pero que la conclusión del teorema de Radon-Nikodým no es válida.

Análisis Real I - Examen 2

Problema 5: Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio con medida. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles real valuadas e integrables en $D \in \mathcal{A}$. Supongamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \mu\text{c.t.p. en } D.$$

(a) Muestra que si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D |f_n| d\mu = \int_D |f| d\mu$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\mu = \int_D f d\mu$.

Sugerencia: Aplica la extensión de convergencia dominada escrito en el siguiente problema para $g_n = 2(|f_n| + |f|)$ y $h_n = |f_n - f| + |f_n| - |f|$.

Análisis Real I - Examen 2

- (b) (**continuación del problema 5**) Muestra que el converso de la parte (a) es falso construyendo un contra-ejemplo.

Análisis Real I - Examen 2

Bono: (Extensión del Teorema de Convergencia Dominada). Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio con medida y sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, y f, g funciones medibles real-valuadas. Sea $D \in \mathcal{A}$ un conjunto medible. Supongamos que

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ μ -c.t.p. en D .
- (b) $\{g_n\}$ y g son integrables en D y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D g_n d\mu = \int_D g d\mu$.
- (c) $|f_n| \leq g_n$ en D para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demuestra que f es integrable en D y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D f_n d\mu = \int_D f d\mu$.