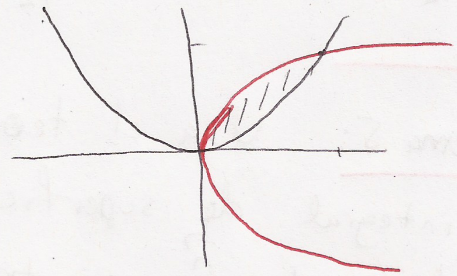
(HwS
2014

Problema 3: Usa el teorema de Green para evaluar las siguientes integrales de línea a lo largo de las curvas orientadas positivas siguientes.

$$\int_C (y+e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x+\cos y^2)\,dy,$$ C es la frontera de la región encerrada por las parábolas $y=x^2$, y $x=y^2$



Región acotada:

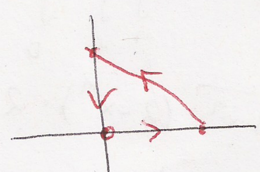
$0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}$

$$\oint_C (y+e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x+\cos y^2)\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left[2-1\right] dy\,dx = \int_0^1 (-x^2+\sqrt{x})\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = +\frac{1}{3}$$

Problema 4: Usa el teorema de Green para encontrar el trabajo hecho por un campo de fuerza $\vec{F}(x,y) = (x(x+y),\, xy^2)$ de una partícula moviéndose del origen a lo largo del eje x a (1,0), y luego a lo largo del segmento de línea a (0,1), y luego de nuevo al origen a lo largo del eje y.



$$W = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C x(x+y)\,dx + xy^2\,dy$$

$$= \iint_\Delta (y^2-x)\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y^2-x)\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x} - xy\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3} - x\cdot(1-x)\,dx = \int_0^1 -\frac{(x-1)^3}{3} + x^2 - x\,dx$$

$$= -\frac{(x-1)^4}{12}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1+4-6}{12} = -\frac{1}{12}$$

Problema 5: Usa el teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, es decir, calcula el flujo de $\vec{F}$ a través de S.

$F(x,y,z) = (e^y \tan z,\ y\sqrt{3-x^2},\ x\,\mathrm{sen}\, y)$, S es la superficie del sólido que permanece arriba del plano xy y bajo la superficie $z = 2-x^4-y^4$, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

Respuesta:

$$\mathrm{div}(\vec{F}) = 0 + \sqrt{3-x^2} + 0 = \sqrt{3-x^2}$$

Sólido: $-1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1,\quad 0 \le z \le 2 - x^4 - y^4$ lo cual se satisface para todo $-1 \le x, y \le$

$\Rightarrow\ x^4 + y^4 \le 2$.

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_0^{2-x^4-y^4} \sqrt{3-x^2}\,dz\,dy\,dx = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 \sqrt{3-x^2}\,(2-x^4-y^4)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{3-x^2}\,(2-x^4)\cdot 2 - \sqrt{3-x^2}\,\frac{y^5}{5}\Big|_{-1}^1\,dx$$

$$= \left(4-\frac{2}{5}\right)\int_{-1}^1 \sqrt{3-x^2}\,dx - 2\int_{-1}^1 \sqrt{3-x^2}\,x^4\,dx$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

HwS

Tambien podemos calcular $\int \sqrt{3-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{3-x^2} + \frac{3}{2}\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$

$$\int x^4\sqrt{3-x^2}\,dx = \frac{1}{48}\left(x\sqrt{3-x^2}\,(8x^4-6x^2-27)+81\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{20-2}{5}\cdot\left[\frac{1}{2}\sqrt{3-1}+\frac{3}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$-\frac{2}{48}\left(\sqrt{2}\,(8-6-27)+81\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{2}\,(8-6-27)+81\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$=\frac{18}{5}\left(\sqrt{2}+3\,\text{sen}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{24}\left(50\sqrt{2}+162\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{18}{5}+\frac{25}{12}\right)\sqrt{2}+\frac{54}{5}\,\text{sen}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{81}{12}\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{216+125}{60}\sqrt{2}+\frac{648+405}{60}\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{341}{60}\sqrt{2}+\frac{81}{20}\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$