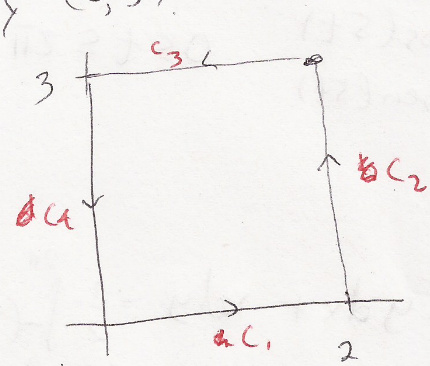
120l
201

Tarea 4

Problema 1. Evalua las siguientes integrales de línea usando dos métodos: (a) directamente y (b) usando el teorema de Green.

(a) $\int_C xy^2\,dx + x^3\,dy$, C es el rectángulo con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$ y $(0,3)$



Respuesta:

Segmento C_1: $x = 2t$, $y = 0$, $0 \le t \le 1$

$\int_{C_1} xy^2\,dx + x^3\,dy = 0$ pues $y = 0, y' = 0$

C_2: $x = 2$, $y = 3t$, $0 \le t \le 1$

$\int_{C_2} xy^2\,dx + x^3\,dy = \int_0^1 2^3\, y'(t)\,dt = \int_0^1 8 \cdot 3\,dt = 24$

C_3: $x = 2\cdot(1-t)$, $y = 3$, $0 \le t \le 1$

$\int_{C_3} xy^2\,dx + x^3\,dy = \int_0^1 2\cdot(1-t)\cdot 9 \cdot (-2)\,dt$

$= -36\int_0^1 (1-t)\,dt = -36\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = -18$

C_4: $x = 0$, $y = 3\cdot(1-t)$, $0 \le t \le 1$

$\int_{C_4} xy^2\,dx + x^3\,dy = 0$ pues $x = 0, x' = 0$.

$\Rightarrow \int_C xy^2\,dx + x^3\,dy = 24 - 18 = \cancel{}\ +6$

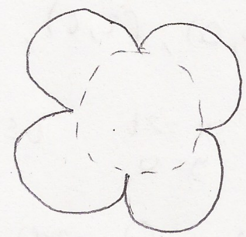
Green: $\int_C xy^2\,dx + x^3\,dy = \iint_{\text{Rectangulo}} (3x^2 - 2xy)\,dA$

$= \int_0^2 \int_0^3 (3x^2 - 2xy)\,dy\,dx = \int_0^2 (9x^2 - x\cdot 9)\,dx = 3x^3 - \frac{9x^2}{2}\Big|_0^2$

$= 24 - 18 = 6$

Problema 2: Si un circulo C con radio 1 se enrolla a fuer al rededor del circulo $x^2+y^2=16$, un punto fijo P en C trata una curva llamada epicicloide, con ecuaciones paramétricas $x = 5\cos t - \cos(5t)$, $y = 5\,\text{sen}\,t - \text{sen}(5t)$, $0 \le t \le 2\pi$. La gráfica se muestra abajo. Encuentra el area que cubre el epicicloide.

$x = 5\cos t - \cos(5t)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$.
$y = 5\,\text{sen}\,t - \text{sen}(5t)$



Respuesta:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -(5\,\text{sen}\,t - \text{sen}(5t))(-5\,\text{sen}\,t + 5\,\text{sen}5t) + (5\cos t - \cos(5t))(5\cos t - 5\cos(5t))\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 25\,\text{sen}^2 t - 25\,\text{sen}\,t\,\text{sen}(5t) - 5\,\text{sen}(5t)\,\text{sen}\,t + 5\,\text{sen}^2(5t)\,\cancel{\cos(5t)} + 25\cos^2 t - 25\cos(5t)\cos t - 5\cos(5t)\cos t + 5\cos^2(5t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 25 + 5\,dt + 0$$ $\rightarrow$ las integrales cruzadas se pueden demostrar tener integral cero mediante integrales por partes.

$= \pi \cdot 30 = 30\pi$.

Problema 3.

(a) Si C es el segmento de línea que conecta el punto (x_1, y_1) a (x_2, y_2), muestra que

$$\int_C x\,dy - y\,dx = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Respuesta: $\vec{r}(t) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\int_C x\,dy - y\,dx = \int_0^1 (x_1 + t(x_2 - x_1))(y_2 - y_1) - (y_1 + t(y_2 - y_1)) \cdot (x_2 - x_1)\,dt$$

$$= x_1(y_2 - y_1) + \cancel{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - y_1(x_2 - x_1) - \cancel{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)} \frac{t^2}{2}$$

$$= x_1 y_2 - \cancel{x_1 y_1} - y_1 x_2 + \cancel{y_1 x_1} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(b) Si los vértices de un polígono, en el sentido contrario a las manecillas del reloj, son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, muestra que el área del polígono es

$$A = \frac{1}{2}\left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \ldots (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)\right]$$

Respuesta:
Usando el teorema de Green, obtenemos:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_{C_j} x\,dy - y\,dx$$

donde C_j es el segmento que conecta a (x_j, y_j) a (x_{j+1}, y_{j+1}) si $j < n$; (x_n, y_n) a (x_1, y_1) si $j = n$

$$= \frac{1}{2}\left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \ldots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)\right].$$

(c) Encuentra el área del pentágono con vértices $(0,0), (2,1), (1,3), (0,2)$, y $(-1,1)$

Respuesta: $A = \frac{1}{2}\left[(0-0) + (2\cdot 3 - 1\cdot 1) + (1\cdot 2 - 0) + (0+2) + (0-0)\right]$

$$= \frac{1}{2}[5 + 2 + 2] = \frac{9}{2}$$