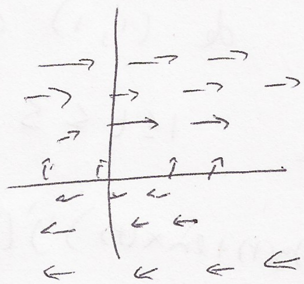
T1.
2017

Tarea 1

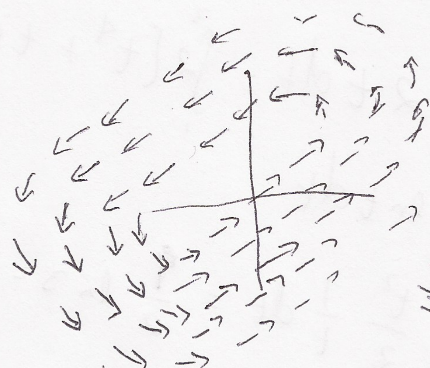
Problema 1 Dibuja un diagrama que explique el comportamiento de los siguientes campos de vectores.

- $F(x,y) = (y, 1/2)$



10

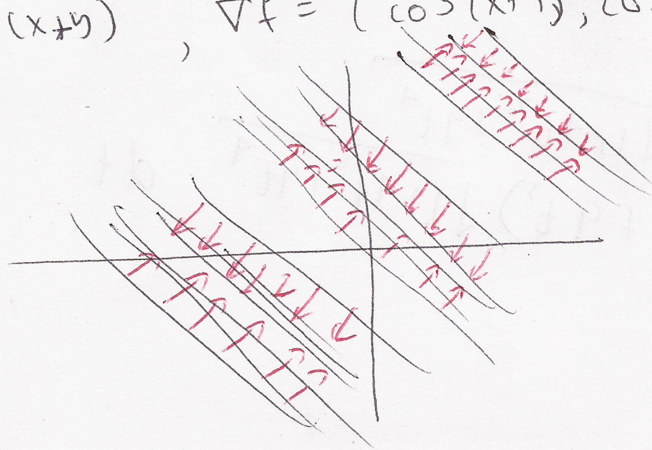
- $F(x,y) = (x-y, x)$



- $F(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

Problema 2: Encuentra la gráfica del campo gradiente de f junto con las curvas de nivel de f.
de $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$, junto con las curvas de nivel de f.
Explica como se relacionan

$f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$, $\nabla f = (\cos(x+y), \cos(x+y))$



10

El campo gradiente es perpendicular a las ~~campo~~ curvas de nivel.

Problema 3: Evalua las integrales de línea sobre cada una de las curvas C especificadas.

- $\int_C (xy + \ln x)\,dy$, C: arco de la parabola $y = x^2$ de $(1,1)$ a $(3,9)$.

10

Respuesta:

Parametrización: $x = t$, $y = t^2$, $1 \le t \le 3$

$$\int_C (xy + \ln x)\,dy = \int_1^3 (x(t)y(t) + \ln x(t))\,y'(t)\,dt$$

$$= \int_1^3 (t t^2 + \ln t)\,2t\,dt = \int_1^3 2[t^4 + t\ln t]\,dt$$

$$= \frac{2t^5}{5}\Big|_1^3 + 2\int_1^3 t\ln t\,dt$$

$$\int_1^3 t \ln t\,dt = \frac{t^2}{2}\ln t\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,dt = \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{2}\Big|_1^3$$

$$\Rightarrow \int_C (xy + \ln x)\,dy = \frac{2}{5}\cdot 243 - \frac{2}{5} + 2\left(\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{484}{5} - 2\cancel{/} + 9\ln 3 \cancel{= \frac{474}{5} + \frac{9}{2}\ln 3 \approx 99.7438}$$

$$= 102.6875$$

10

- $\int_C (2x + 9z)\,ds$, C: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$

$x' = 1$, $y' = 2t$, $z' = 3t^2$

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\int_C (2x + 9z)\,ds = \int_0^1 (2t + 9t^3)\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}\,dt$$

Hw1.

Cambio de variable:

$u = 1 + 4t^2 + 9t^4 \qquad du = (8t + 9\cdot 4t^3)dt = 4\cdot(2t + 9t^3)\,dt$

$\Rightarrow \int_C (2x + 9z)\,ds = \int_1^{14} \frac{1}{4}\sqrt{u}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_1^{14} = \frac{1}{4}\frac{2}{3}\left(\sqrt{2744} - 1\right)$

$\approx \frac{34.2555}{4} = 8.56$

Problema 4: Evalúa $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde C está dada por la parametrización $r(t)$ a continuación.

10

$\vec{F}(x,y) = (x^2y^3, -y\sqrt{x}), \qquad \vec{r}(t) = (t^2, -t^3), \quad 0 \le t \le 1$

$\vec{r}\,'(t) = (2t, -3t^2)$

$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^4(-t^3)^3, +t^3\sqrt{t^2})\cdot(2t, -3t^2)\,dt$

$= \int_0^1 [-2t^{14} \cancel{+} 3t^6]\,dt = -2\frac{t^{15}}{15} \cancel{+} 3\frac{t^7}{7}\Big|_0^1$

$= -\frac{2}{15} \cancel{+} \frac{3}{7} = \frac{-14 \cancel{+} 45}{105} = \frac{\cancel{31}}{\cancel{105}} - \frac{59}{105}$

Problema 5: Evalúa la integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde

10

$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$, C: la parabola $y = 1 + x^2$ de $(-1,2)$ a $(1,2)$

Respuesta: $x = t, \; y = 1 + t^2 \qquad -1 \le t \le 1$

$x' = 1 \quad y' = 2t$

$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{t^2 + (1+t^2)^2}}(t, 1+t^2)\cdot(1, 2t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{}}(t + 2t + 2t^3)\,dt$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{3t+2t^3}{\sqrt{t^2+t^4+2t^2+1}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{3t+2t^3}{\sqrt{t^4+3t^2+1}}\,dt$$

$u = t^4+3t^2+1 \qquad du = (4t^3+6t) = 2(3t+2t^3)$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{1/2}\Big|_5^5 = 0.$$

$\underline{\quad 0 \quad}$

Problema 8: La base de una cerca circular con radio 10 m está dado por $x = 10m \cos t$, $y = 10m \operatorname{sen} t$. Si la altura de la cerca en una posición (x, y) es $h(x,y) = 4 + 0.01(x^2 - y^2)$, de ~~tal~~ tal manera que la altura varía de 3 a 5 m. Supongamos que 1 litro de pintura cubre 100 m^2. Dibuja una cerca y determina cuanta pintura se necesitaría si pintas ambos lados de la cerca.

typo

Respuesta: 10

#7. $\vec{F} = (x, y+2)$ campo de fuerza.

cicloide $\vec{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

$$\text{Work} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t + 2) \cdot (1 - \cos t, \operatorname{sen} t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (t - \operatorname{sen} t)(1 - \cos t) + (3 - \cos t)(\operatorname{sen} t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t - t\cos t - \operatorname{sen} t + \cancel{\operatorname{sen} t \cos t} + 3\operatorname{sen} t - \cancel{\cos t \operatorname{sen} t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t - t\cos t + 2\operatorname{sen} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} - \cancel{2\cos t\Big|_0^{2\pi}}^{\,0}$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{2} - \left[\cancel{t\operatorname{sen} t\Big|_0^{2\pi}}^{\,0} - \cancel{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\,dt}^{\,0}\right] = 2\pi^2.$$