Math III - Ciencias de la Tierra : Examen 2 de la segunda parte del curso

Profesor: Gerardo Hernández

Noviembre 21, 2014

* POR FAVOR ESCRIBE TU NOMBRE EN CADA HOJA
* EXPLICA TU RESPUESTA EN INCLUYE LOS DETALLES

NUMERO TOTAL DE PAGINAS: 6

TU NOMBRE:

Soluciones

Prob 1 /20	
Prob 2 /20	
Prob 3 /20	
Prob 4 /20	
Prob 5 /20	
TOTAL /100	

Mucha suerte en su examen!

Mat III Examen 2

Problem 1. Usa el teorema de Green para evaluar

$$\int_C y^4 dx + 2xy^3 dy,$$

donde C es la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$.

$\vec{F} = (y^4, 2xy^3) \qquad P = y^4, \; Q = 2xy^3$

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2y^3 - 4y^3 = -2y^3$

$\oint_C y^4 dx + 2xy^3 dy = -2\iint_{\text{elipse}} y^3 \, dx\,dy = 0$ por simetría.

$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \qquad \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 1 \qquad \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{array}$

$\int_0^{2\pi} 4\cos^4\theta\,(-\operatorname{sen}\theta) + 2\sqrt{2}\cos\theta\,\operatorname{sen}^3\theta\,\cos\theta\,d\theta$

$= 0$ por imparidad.

$\begin{array}{l} x = \sqrt{2}\,r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{array} \qquad J = \begin{vmatrix} \sqrt{2}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\sqrt{2}\,r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \sqrt{2}\,r$

$-2\int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,r\,(r\operatorname{sen}\theta)^3\,d\theta\,dr = -2\cancel{\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta}^{\to 0}\int_0^1 \sqrt{2}\,r^4\,dr$

Problem 2. Determina si los siguientes campos vectoriales $\boldsymbol{F}$ son conservativos. Si son, encuentra una función f tal que $\boldsymbol{F} = \nabla f$.

- $\boldsymbol{F}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

$P = e^x \cos y, \quad Q = e^x \text{sen}\, y$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \text{sen}\, y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \text{sen}\, y$

No es conservativo.

- $\boldsymbol{F}(x, y) = (2x \sin y, x^2 \cos y - 2y)$

$P = 2x \text{sen}\, y, \quad Q = x^2 \cos y - 2y$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \cos y \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cos y$

$\Rightarrow$ Es conservativo

$\partial_x f = 2x \text{sen}\, y \Rightarrow f = x^2 \text{sen}\, y + g(y)$

$\partial_y f = x^2 \cos y - 2y$

$\partial_y f = x^2 \cos y + g'(y) \Rightarrow g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2 + \text{const.}$

$f(x,y) = \cancel{x^2 \cos}\ x^2 \text{sen}\, y - y^2$

Mat III Examen 2

Problema 3: Demuestra que el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (yze^{xy}, xze^{xy} + z, e^{xy} + y + 2z),$$

es conservativo. Encuentra una función f tal que $\boldsymbol{F} = \nabla f$, y úsala para evaluar $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, donde C es la hélice $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$, $0 \leq t \leq 1$ que va de $(1,0,0)$ a $(1,0,1)$.

$P = yz\, e^{xy}$, $Q = xze^{xy} + z$, $P = e^{xy} + y + 2z$

$$\mathrm{Rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yze^{xy} & xze^{xy} + z & e^{xy} + y + 2z \end{vmatrix}$$

$= i\,(\cancel{xe^{xy}} + x - \cancel{xe^{xy}} - x) - j\,(\cancel{ye^{xy}} - \cancel{ye^{xy}}) + k\,(\cancel{ze^{xy}} + \cancel{xzye^{xy}} - \cancel{ze^{xy}} - \cancel{xyze^{xy}})$

$xzye^{xy}$ $\quad xyze$

$= \vec{0}$

$\Rightarrow$ $\vec{F}$ es un campo conservativo.

Encontrar potencial:

$\partial_x f = yz\, e^{xy} \quad \Rightarrow \quad f = z e^{xy} + g(y,z)$

$\partial_y f = xz e^{xy} + z$

$\partial_z f = e^{xy} + y + 2z$

$\partial_y f = xz e^{xy} + \dfrac{\partial g}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \cancel{xze^{xy}} + z = \cancel{xze^{xy}} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = z \quad \Rightarrow g(y,z) = yz + a(z)$

$\Rightarrow f = ze^{xy} + yz + a(z)$

$\partial_z f = e^{xy} + y + a'(z) = e^{xy} + y + 2z \quad \Rightarrow a'(z) = 2z \quad \Rightarrow a(z) = z^2 + \mathrm{con}$

$f(x,y,z) = z e^{xy} + yz + z^2$.

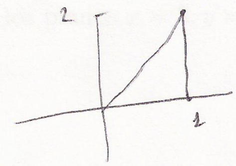
$\int \vec{F} \cdot dr = f(1,0,1) - f(1,0,0) = 1 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$

Mat III Examen 2

Problem 4. Usa el teorema de Green para evaluar

$$\oint_C xydx + x^2y^3dy,$$

donde C es el triángulo con vértices $(0,0), (1,0)$ y $(1,2)$.



$P = xy, \; Q = x^2y^3$

$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le 2x$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy^3 - x = x(2y^3-1)$$

$$\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy = \int_\Delta x(2y^3-1)\,dA =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2x} x(2y^3-1)\,dy\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{2y^4}{4} - y\right)\Big|_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 x\left(16\frac{x^4}{2} - 2x\right) dx = \cancel{\frac{x^6}{12} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1}$$

$$\cancel{= \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1-4}{12} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}}$$

$$= \int_0^1 8x^5 - 2x^2\,dx = 8\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{8}{6} - \frac{2}{3} = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Problema 5: Usa el teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie $\int\int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, es decir, calcula el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S, donde

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xye^z, y^2z^3, -ye^z),$$

y S es la superficie de la caja acotada por los planos xy, yz, xz y los planos $x = 3, y = 2$ y $z = 1$.

$P = xye^z, \quad Q = y^2z^3, \quad R = -ye^z.$

$\operatorname{div} \vec{F} = ye^z + 2yz^3 - ye^z = 2yz^3$

$E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq y \leq 2, \ 0 \leq z \leq 1\}.$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E 2yz^3 \, dV = \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 2yz^3 \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 2y \frac{z^4}{4} \Big|_0^1 dy\, dx = \int_0^3 \int_0^2 \frac{y}{2} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^3 \frac{y^2}{4} \Big|_0^2 dx = \int_0^3 1 \, dx = 3.$$