TERMINAL VI (SIMULACION) - 2020 - 2. TAREA 2

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes, 20 de octubre, 2020.
Antes de las 4:40 PM 100%
Después de las 4:40 PM y hasta las 12 PM 80%
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema 1: Considera la ecuación de transporte $\theta_t + c\theta_x = 0$.
Encuentra la relación de dispersión de las siguientes discretizaciones

(a)
$$\theta_t + \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta x} = 0,$$

(b)
$$\theta_t + c\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta x} = 0.$$

Muestra las gráficas de la frecuencia re-escalada $|\omega'| = \frac{|\omega|\Delta x}{c}$ como función de $k' = \frac{k\Delta x}{\pi}$. Compara las dos opciones.

Problema 2: Del problema anterior, utiliza la discretización de la derivada temporal a tiempo $t_n = n\Delta t$ como
$$\partial_t\theta\big|_{x=x_i,t=t_n} \approx \frac{\theta(x_i, t_n + \Delta t) - \theta(x_i, t_n)}{\Delta t},$$
para llegar a los siguientes dos esquemas numéricos:

(a)
$$\theta_i^{(n+1)} = \theta_i^{(n)} - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(\theta_i^{(n)} - \theta_{i-1}^{(n)}\right),$$

(b)
$$\theta_i^{(n+1)} = \theta_i^{(n)} - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}\left(\theta_{i+1}^{(n)} - \theta_{i-1}^{(n)}\right) = 0,$$

Utiliza los métodos numéricos de las partes (a) y (b) para encontrar la solución a tiempo $t = 0.2$ del problema
$$\begin{cases} \theta_t + \theta_x = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ \theta(x, t=0) = \begin{cases} (x-0.25)(0.75-x) & \text{si} \quad 0.25 \leq x < 0.75 \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases} \end{cases}$$

Nota: Aquí $c = 1$. Utiliza condiciones de frontera Neumann, una malla con 100 puntos, y un tamaño de paso $\Delta t = 0.9\Delta x/c$.

Problema 3: Considera el modelo para ondas debido a la gravedad
$$\begin{aligned} \partial_t u &= -g\partial_x\eta \\ \partial_t\eta &= -H\partial_x u, \end{aligned}$$

con $H = 1$, $g = 9.81$, en el dominio $x \in [0, 1]$, y condiciones iniciales

$$u = 0, \eta(x, 0) = \begin{cases} 80(x - 0.45)(0.55 - x) & \text{si} \quad 0.45 \leq x \leq 0.55 \\ \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Encuentra las soluciones numéricas obtenida con los siguientes algoritmos

(a) Malla escalonada

$$\begin{aligned} u_i^{(n+1)} &= u_i^{(n)} - \tfrac{g\Delta t}{\Delta x}\left(\eta_{i+1/2}^{(n)} - \eta_{i-1/2}^{(n)}\right) \\ \eta_{i+1/2}^{(n+1)} &= \eta_{i+1/2}^{(n)} - \tfrac{H\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i+1}^{(n)} - u_i^{(n)}\right) \end{aligned}$$

(a) Diferencia centrada en el espacio

$$\begin{aligned} u_i^{(n+1)} &= u_i^{(n)} - \tfrac{g\Delta t}{2\Delta x}\left(\eta_{i+1}^{(n)} - \eta_{i-1}^{(n)}\right) \\ \eta_i^{(n+1)} &= \eta_i^{(n)} - \tfrac{H\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{i+1}^{(n)} - u_{i-1}^{(n)}\right) \end{aligned}$$

Nota: Utiliza condiciones de frontera Neumann, una malla de 100 puntos y busca diferentes pasos de tiempo Δt. Escribe tus observaciones.