

TERMINAL IV: SIMULACIÓN
SEMESTRE 2020-1
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
TAREA 8

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Jueves 28 de mayo

Problema: Considera la ecuación de Burgers viscosa con condiciones Dirichlet:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) &= \epsilon u_{xx}, & -3 \leq x \leq 3 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq -1 \\ -1 - x & \text{if } -1 < x \leq 0 \\ -1 + x, & \text{if } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{if } 1 < x. \end{cases} \\ u(-3, t) = u(3, t) = 0. & \text{Condición de frontera Dirichlet} \end{cases}$$

Usando la transformada de Cole-Hopf, resuelve el problema anterior. Considera valores de ϵ decrecientes y comenta que observas cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Específicamente,

- (a) Aproxima numéricamente la solución a tiempo $t = 0.5, 1$, y para cada tiempo, considera dos valores del coeficiente de viscosidad $\epsilon = 0.005, 0.02$. Sin viscosidad, las curvas características nos da una solución exacta para tiempos $t \leq 1$ cuando las curvas se intersecan por primera vez, para la condición inicial dada arriba. Para cada tiempo, grafica tanto la solución exacta como la aproximada. **60 puntos**
- (b) La solución viscosa se puede calcular para tiempos post-choque $t \geq 1$. Aproxima la solución a tiempo $t = 2$ para $\epsilon = 0.005, 0.02$. Que observas para el valor más chico de ϵ ? Grafica las dos soluciones. Puedes conjeturar a que converge la solución cuando $\epsilon \rightarrow 0$ a tiempo $t = 2$? **40 puntos**

Sugerencia para la solución numérica:

- Dada la condición inicial $u_o(x)$, aplica la transformada Cole-Hopf

$$\varphi_o(x) = \exp \left(-\frac{1}{2\epsilon} \int_{x_o}^x u_o(s) dz \right).$$

- Resuelve la ecuación del calor $\varphi_t = \epsilon \varphi_{xx}$ con la condición inicial $\varphi_o(x)$.

Nota: Debes resolver la ecuación del calor para φ con el esquema numérico

$$\varphi_j^{(n+1)} = \varphi_n + \frac{\epsilon \Delta t}{\Delta x^2} \left(\varphi_{j-1}^{(n)} - 2\varphi_j^{(n)} + \varphi_{j+1}^{(n)} \right).$$

Usa condiciones Neumann $\partial_x \varphi(-3, t) = \partial_x \varphi(3, t) = 0$. En el código, las condiciones periódicas se leen $\varphi(0) = \varphi(N), \varphi(N+1) = \varphi(1)$. Para condiciones Neumann en φ , debes usar $\varphi(0) = \varphi(1), \varphi(N+1) = \varphi(N)$.

- Vuelve a la ecuación de Burgers viscosa mediante la transformada inversa $u = -2\epsilon \varphi_x / \varphi$.