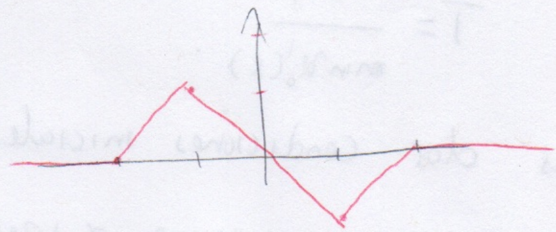
1205
2017

Tarea 9 - Simulación

Problema 1: Usando el método de las características, encuentra la solución exacta de la ecuación de Burgers para $t \leq 1$

$$\begin{cases} u_t + \partial_x(\tfrac{1}{2}u^2) = 0, & -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ 2+x & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -2+x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \end{cases} \end{cases}$$



Si $x_0 \in (-2,-1] \Rightarrow \dot{x}(t) = u_0(x_0) = 2 + x_0$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + (2+x_0)t = 2t + x_0(1+t) \Rightarrow x_0 = \frac{x-2t}{1+t} \Rightarrow u = u_0(x_0) = 2 + x_0 = \frac{2(1+t)+x-2t}{1+t} = \frac{2+x}{1+t}$$

$$-1 \leq x_0 \leq 1 \Rightarrow x_0 = x_0 + u_0(x_0)t = x_0 - x_0 t = x_0(1-t) \Rightarrow x_0 = \frac{x}{1-t}$$

$$\Rightarrow u = u_0(x_0) = -x_0 = -\frac{x}{1-t}$$

Si $1 \leq x_0 \leq 2 \Rightarrow x(t) = x_0 + u_0(x_0)t = x_0 + (-2+x_0)t = -2t + x_0(1+t)$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{x+2t}{1+t} \Rightarrow u = u_0(x_0) = -2 + x_0 = \frac{-2(1+t)+x+2t}{1+t} = \frac{-2+x}{1+t}.$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2, \ t \leq 1 \\ \frac{2+x}{1+t} & \text{si } -2 < \frac{x-2t}{1+t} \leq -1, \ t < 1 \\ -\frac{x}{1-t} & \text{si } -1 \leq \frac{x}{1-t} < 1, \ t < 1 \\ \frac{-2+x}{1+t} & \text{si } 1 < \frac{x+2t}{1+t} \leq 2, \ t < 1 \\ 0 & \text{si } 2 < x, \ t < 1. \end{cases}$$

Problema 2: Considera la ecuación de Burgers con condición inicial suave $u_0(x)$. Supongamos que $u_0'(x)$ es negativa en al menos un punto. Demuestra que las curvas características chocan por primera vez a tiempo
$$T = \frac{-1}{\min u_0'(x)}.$$

Dem: Dadas dos condiciones iniciales x_0, x_1, las soluciones son

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t \quad y \quad y(t) = x_1 + u(x_1)t$$

Estas curvas se intersecan a tiempo t si

$$x_0 + u_0(x_0)t = x_1 + u(x_1)t \iff t = \frac{-1}{\frac{u(x_1)-u(x_0)}{x_1 - x_0}} = -\frac{1}{u_0'(x_m)} \text{ para algún } x_m \text{ entre } x_0 \text{ y } x_1$$

Entonces el tiempo mínimo es

$$T = \min_x \left(-\frac{1}{u_0'(x)}\right) = +\max\left(\frac{1}{-u_0'(x)}\right) = \frac{1}{\max(-u_0'(x))} = \frac{-1}{\min(u_0'(x))}$$