TERMINAL IV (SIMULACIÓN) - 2017 - 2. TAREA 7

PROFESOR: GERARDO HERNÁNDEZ DUEÑAS

Para entregar : Martes, 17 de octubre
Antes de las 10:10 AM 100%
Después de las 10:10 AM y antes de las 5 PM 80%
No se aceptarán tareas después de las 5 PM
Se darán solo créditos parciales a respuestas que no incluyan detalles

Problema: En clase vimos que la solución a la ecuación de transporte

$$\begin{cases} \partial_t u + a\partial_x u & = & 0, -\infty < x < \infty \\ u(x,0) & = & u_o(x) \end{cases}$$

es $u(x,t) = u_o(x-at)$ si a es constante y $u_o(x)$ es una función suave de x. La solución es simplemente una traslación horizontal de la condición inicial. Veremos más adelante en el curso que en el caso en que $u_o(x)$ es una función suave por pedazos, la misma traslación representa una solución *débil*. Considera entonces el problema

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u & = & 0, -1 \le x \le 1 \\ \partial_x u & = & 0 \text{ para } x = -1, 1 \text{ (condiciones de frontera Neumann)}, \\ u(x,0) & = & \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}. \end{cases},$$

en donde $a = 1$. Aproxima la solución a tiempo $t = 0.5$ con los siguientes esquemas numéricos:

- $u_j^{(n+1)} = u_j^{(n)} - \nu \left(u_j^{(n)} - u_{j-1}^{(n)} \right)$, $\nu = a\Delta t/\Delta x$.
- $u_j^{(n+1)} = u_j^{(n)} - \frac{\nu}{2} \left(u_{j+1}^{(n)} - u_{j-1}^{(n)} \right)$, $\nu = a\Delta t/\Delta x$.

Usa una resolución de $\Delta x = 2/100$ y un tamaño de paso $\Delta t = 0.018$ y $\Delta t = 0.026$. Explica lo que observas y relaciónalo con las condiciones de estabilidad de von Neumann.

Solución:

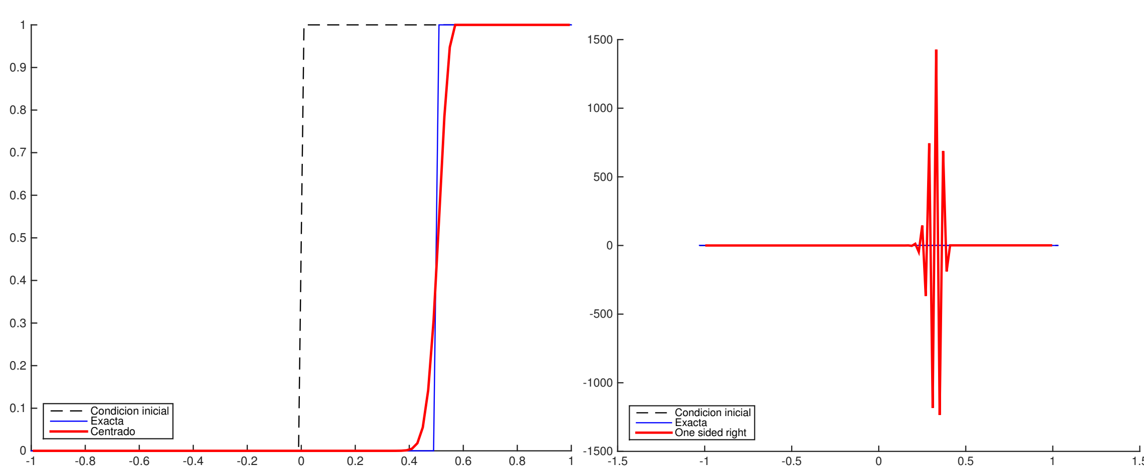

FIGURE 1. Solución con el esquema 1 y tamaños de tiempo $\Delta t = 0.018, 0.026$

La figura 1 muestra la condición inicial, solución exact y numérica para al primer esquema numérico para $\Delta t = 0.018$ (izquierda) y $\Delta t = 0.018$ (derecha). La solución en el primer caso es estable y corresponde con un número de Courant $\nu = a\Delta t/\Delta x = 0.9$. El segundo corresponde a $\nu = 1.3$. Esto va de acuerdo con la condición de estabilidad de von Neumann $\nu \leq 1$.

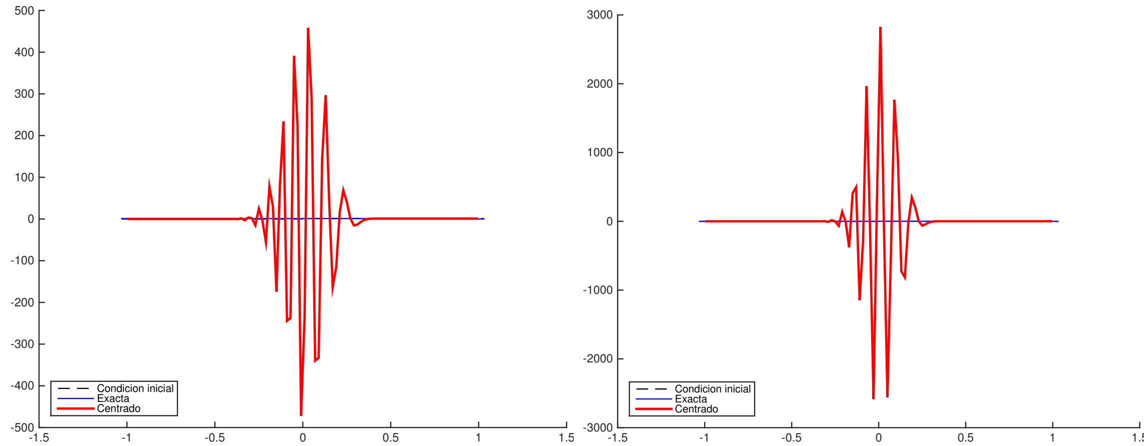

FIGURE 2. Solución con el esquema 1 y tamaños de tiempo $\Delta t = 0.018, 0.026$

La figura 2 repita la solución numérica con el esquema centrado. Según lo vimos en clase, este esquema es incondicionalmente inestable. Sin importar el número de Courant, la solución es inestable.