0925.1
2017

Terminal IV   Tarea 1

Problema 1: Encuentra todas las posibles soluciones estacionarias de la ecuación del calor

$$\partial_t u = \partial_x(k(x)\partial_x u)$$

con coeficientes de viscosidad que dependen de la variable x. Encuentra todas las soluciones estacionarias para $k(x) = e^{-x}$.

Respuesta:

Las soluciones estacionarias satisfacen $\partial_t u = 0$

$$\Rightarrow \partial_x(k(x)\partial_x u) = 0 \Rightarrow k(x)\partial_x u = c_1 = cte$$

$$\Rightarrow \partial_x u = \frac{c_1}{k(x)} \Rightarrow \boxed{u = \int \frac{c_1}{k(x)}dx + c_2}$$ si $k(x) \neq 0$ y la integral existe

Las constantes c_1 y c_2 podrían estar determinadas por las condiciones de frontera.

Para $k(x) = e^{-x}$ $u = c_1\int e^x dx + c_2 = c_1 e^x + c_2$.

Problema 2: Considera la ecuación del calor

$$\begin{cases} \partial_t u = k(t)\partial_x^2 u, & 0 \leq x \leq L \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u(x,t) \text{ periódica en } [0,L] \end{cases}$$

en donde la conductividad $k = k(t)$ es una función del tiempo. Usando series de Fourier, encuentra la solución general para el problema de frontera arriba.

Respuesta: Procediendo por separación de variables $u = \phi(t)\psi(x)$ obtenemos

$$\frac{\phi'(t)}{k(t)\phi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = c$$

Como vimos en clase, esto implica que

$$C = -\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \quad \text{para } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \cancel{\phi}\ (\log \phi)' = -\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 K(t)$$

$$\Rightarrow \log(\phi(t)) - \log \phi_0 = -\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \int_0^t K(t)\,dt$$

$$\rightarrow \phi(t) = \phi_0\, e^{-\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \int_0^t K(t)\,dt}$$

La solución general es entonces:

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{+\frac{2\pi i n}{L}x}\, e^{-\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \int_0^t K(t)\,dt}, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_0^L u_0(x) e^{-\frac{2\pi i n}{L}x}\,dx$$

Problema 3: Define $K(t) = e^{-t}$ para el problema anterior. En este caso, la conductividad decae exponencialmente, con el tiempo. Analiza el comportamiento de la solución cuando $t \to \infty$.

Respuesta: $\int_0^t K(t)\,dt = -e^{-t}\Big|_0^t = 1 - e^{-t}$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{\frac{2\pi i n}{L}x}\, e^{-\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 (1-e^{-t})}$$

Cuando $t \to \infty$, $1 - e^{-t} \longrightarrow 1$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{\frac{2\pi i n}{L}x}\, e^{-\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2}.$$

Como la conductividad decae exponencialmente, la solución no "alcanza" ~~a~~ la distribución uniforme del calor.