Terminal IV Examen 1

Problema 1: Considera la ecuación del calor:

$$\partial_t u = \partial_x (k(x)\, \partial_x u), \quad 0 \le x \le 1$$

con conductividad variable $k(x) = \frac{1}{x+1}$

Encuentra la solución estacionaria $u = u(x)$ que satisface las condiciones de frontera Dirichlet:

$$u(0) = 1, \; u(1) = 2$$

R: Si u no depende de x, entonces

$$k(x)\, \partial_x u = C_1 \Rightarrow u(x) = C_1 \int_0^x \frac{1}{k(x)} dx + C_2$$

$$\Rightarrow u(x) = C_1 \int_0^x (x+1) dx + C_2 = C_1\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C_2$$

$$1 = u(0) = C_2 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$2 = u(1) = C_1\left(\tfrac{1}{2} + 1\right) + 1 = \frac{3}{2} C_1 + 1 \Rightarrow \frac{3}{2} C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \; u(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + 1 = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}x + 1$$

Problema 2: Encuentra la solución exacta del siguiente problema.

$$\begin{cases} \partial_t u = e^{-t} \partial_x^2 u, & 0 \le x \le 1 \\ u(x,0) = \cos(6\pi x) \\ u(x,t) \text{ periódica en } [0,1] \end{cases}$$

Como $\cos(6\pi x)$ tiene número de onda 3, se puede separar variables: $u(x,t) = \cos(6\pi x)\, \phi(t)$

$$\Rightarrow \phi'(t) \cos(6\pi x) = e^{-t}(-36\pi^2) \cos(6\pi x)\, \phi(t)$$

$$\Rightarrow \phi'(t) = -36\pi^2 e^{-t}\phi$$

$$\Rightarrow \log(\phi(t)) - \log(\phi_0) = -36\pi^2\left(\frac{e^{-t}}{-1}\Big|_0^t\right) = -36\pi^2(1-e^{-t})$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \phi_0 e^{-36\pi^2(1-e^{-t})} \quad y \quad \phi(0)=1$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \cos(6\pi x)\, e^{-36\pi^2(1-e^{-t})}$$

Problema 3: Dada la ecuación del calor $\partial_t u = 10\partial_x^2 u,\ 0\le x\le 1$ redacta el algoritmo visto en clase. Dada una malla con $N=100$ puntos (i.e. $\Delta x = 1/100$), determina el tamaño del paso Δt que garantiza estabilidad de von-Neumann. Explica.

$$u_j^{(n+1)} = u_j^{(n)} + \frac{10\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)}\right).$$

La estabilidad se garantiza si $\dfrac{10\Delta t}{\Delta x^2} \le \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \Delta t \le \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{10} = \frac{1}{2}\frac{10^{-4}}{10} = \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}.$$

Problema 4: Encuentra la solución exacta de la ecuación del calor con condiciones de frontera Dirichlet
$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u, & 0\le x\le 2\pi \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(x/2) \\ u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Aunque aquí ~~no~~ hay condiciones Dirichlet, que son más restrictivas que las periódicas, $\operatorname{sen}(x/2)$ las satisfacen y entonces podemos aplicar separación de variables.

$u(x,t) = \operatorname{sen}(x/2)\,\phi(t)$. Sustituyendo obtenemos:

$$\operatorname{sen}(x/2)\phi'(t) = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}(x/2)\phi(t) \Rightarrow \phi'(t) = -\frac{1}{4}\phi(t) \Rightarrow \phi(t) = \phi_0 e^{-1/4\, t}$$

$$y \quad \phi(0)=1$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \operatorname{sen}(x/2)\, e^{-t/4}$$