Técnicas algebraicas y geométricas en Física

José A. Vallejo

Facultad de Ciencias
UASLP, México

Encuentro nacional de jóvenes investigadores en Matemáticas
UNAM 2015

Ecuaciones de Newton-Lagrange

Las ecuaciones de Newton (en $\mathbb{R}^n$) para el caso conservativo

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad} V(\mathbf{q}),$$

se pueden expresar a partir de una función escalar, el *Lagrangiano*

$$L = T - V = \frac{m}{2}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - V(\mathbf{q}),$$

como un conjunto de n ecuaciones (desde ahora, $1 \leq i \leq n$)

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0.$$

Las cantidades

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

son los *momentos canónicos conjugados* a las variables q^i.

Mecánica Hamiltoniana

Suponiendo que el Lagrangiano es *regular*, las velocidades $\dot{q}^i$ se pueden expresar en función de los momentos p_i y podemos formar el *Hamiltoniano*

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - L.$$

Si en el álgebra $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ se introduce el *corchete de Poisson*

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}$$

se pueden reexpresar las ecuaciones dinámicas como

$$\dot{q}^i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

En general, la evolución de cualquier observable $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ será

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{H, f\}.$$

El caso de campos

La teoría expuesta funciona también en el caso de campos. En este caso, las variables son aplicaciones del tipo $\psi : \mathbb{R}^n \to E$, donde E es la unión disjunta de espacios vectoriales sobre cada punto $E = \bigsqcup_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} E_{\mathbf{q}}$.

El caso de campos

La teoría expuesta funciona también en el caso de campos. En este caso, las variables son aplicaciones del tipo $\psi : \mathbb{R}^n \to E$, donde E es la unión disjunta de espacios vectoriales sobre cada punto $E = \bigsqcup_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} E_{\mathbf{q}}$.
En términos más generales, el espaciotiempo será una variedad M en lugar de $\mathbb{R}^n$, y E será un *fibrado vectorial* sobre M. Los campos físicos, como ψ, se interpretan entonces como secciones diferenciables del fibrado, $\psi \in \Gamma E$.

El caso de campos

La teoría expuesta funciona también en el caso de campos. En este caso, las variables son aplicaciones del tipo $\psi : \mathbb{R}^n \to E$, donde E es la unión disjunta de espacios vectoriales sobre cada punto $E = \bigsqcup_{\mathbf{q}\in\mathbb{R}^n} E_{\mathbf{q}}$.
En términos más generales, el espaciotiempo será una variedad M en lugar de $\mathbb{R}^n$, y E será un *fibrado vectorial* sobre M. Los campos físicos, como ψ, se interpretan entonces como secciones diferenciables del fibrado, $\psi \in \Gamma E$.
Por ejemplo, definimos $\mathcal{H} = \pi_a \partial_0 \psi^a - \mathcal{L}$, donde ahora los momentos conjugados son (con (x^0, x^i) coordenadas locales en M, x^0 actuando como parámetro temporal, y $\psi = \psi^a s_a$, con s_a una base local de ΓE)

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^a)}$$

y las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\psi}^a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a}$$
$$\dot{\pi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi^a} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \partial_i \psi^a} \right)$$

Cuantización

Quisiéramos asociar a q^i, p_i (y, en general, a cada observable $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$) unos operadores autoadjuntos Q^i, P_i, en un espacio de Hilbert adecuado X, de manera que, si

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A$$

es el conmutador de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$, se tenga un morfismo entre las álgebras de Poisson $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{\cdot, \cdot\})$ y $(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X), [\cdot, \cdot])$.

Cuantización

Quisiéramos asociar a q^i, p_i (y, en general, a cada observable $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$) unos operadores autoadjuntos Q^i, P_i, en un espacio de Hilbert adecuado X, de manera que, si

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A$$

es el conmutador de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$, se tenga un morfismo entre las álgebras de Poisson $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{\cdot, \cdot\})$ y $(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X), [\cdot, \cdot])$.

En román paladino, esto quiere decir que si $\{q^i, p_j\} = \delta^i_j$, entonces debe ser $[Q^i, P_j] = -i\hbar\delta^i_j$, y a $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ le debe corresponder el operador $f(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. En el caso de campos, la correspondencia implica que debe cumplirse $[\mathbf{\Psi}(x^0, \mathbf{x}), \Pi(x^0, \mathbf{y})] = -i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Quisiéramos asociar a q^i, p_i (y, en general, a cada observable $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$) unos operadores autoadjuntos Q^i, P_i, en un espacio de Hilbert adecuado X, de manera que, si

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A$$

es el conmutador de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$, se tenga un morfismo entre las álgebras de Poisson $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \{\cdot, \cdot\})$ y $(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X), [\cdot, \cdot])$.

En román paladino, esto quiere decir que si $\{q^i, p_j\} = \delta^i_j$, entonces debe ser $[Q^i, P_j] = -i\hbar\delta^i_j$, y a $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ le debe corresponder el operador $f(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$. En el caso de campos, la correspondencia implica que debe cumplirse $[\mathbf{\Psi}(x^0, \mathbf{x}), \Pi(x^0, \mathbf{y})] = -i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Esto, en general, no es posible. Pero funciona para el oscilador armónico (observables polinomiales cuadráticos, o para el caso arbitrario en un espacio de fase plano) y esto es suficiente para hacer teoría aproximada.

Ligaduras

Una *ligadura* es una relación entre las variables dinámicas (bien entre q^i y p_i, o bien entre ψ^a y π_a). Las ligaduras están íntimamente relacionadas con el problema de definir los momentos conjugados.

Ligaduras

Una *ligadura* es una relación entre las variables dinámicas (bien entre q^i y p_i, o bien entre ψ^a y π_a). Las ligaduras están íntimamente relacionadas con el problema de definir los momentos conjugados.

Ejemplo

El Lagrangiano del campo electromagnético sin fuentes es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2),$$

siendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla A^0$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Las ecuaciones de movimiento son las de Maxwell, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, pero al tratar de construir el Hamiltoniano, $\mathcal{L}$ no depende de $\dot{A}^0$, así que $\pi_0 = 0$.

Ligaduras

Una *ligadura* es una relación entre las variables dinámicas (bien entre q^i y p_i, o bien entre ψ^a y π_a). Las ligaduras están íntimamente relacionadas con el problema de definir los momentos conjugados.

Ejemplo

El Lagrangiano del campo electromagnético sin fuentes es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2),$$

siendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla A^0$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Las ecuaciones de movimiento son las de Maxwell, $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, pero al tratar de construir el Hamiltoniano, $\mathcal{L}$ no depende de $\dot{A}^0$, así que $\pi_0 = 0$. No todas las ecuaciones Lagrangianas se pueden poner en forma Hamiltoniana. Algunas deben incluirse como ligaduras (y recíprocamente: al incluir ligaduras como variables mediante el método de Lagrange, éstas carecen de momentos asociados).

Formalismo BRST

Una manera de evitar el problema planteado por las ligaduras (formalismo BRST) consiste en introducir variables que anticonmutan. Esto implica utilizar unos campos (llamados fantasmas o *ghosts*) que cumplen unas relaciones espín-estadística no físicas. Su 'tiempo de vida' debe ser inferior al previsto por las relaciones de incertidumbre de Heisenberg, de manera que tales campos no sean observables. Es decir, junto con estos campos hay que proporcionar un mecanismo para aniquilarlos.

Formalismo BRST

Una manera de evitar el problema planteado por las ligaduras (formalismo BRST) consiste en introducir variables que anticonmutan. Esto implica utilizar unos campos (llamados fantasmas o *ghosts*) que cumplen unas relaciones espín-estadística no físicas. Su 'tiempo de vida' debe ser inferior al previsto por las relaciones de incertidumbre de Heisenberg, de manera que tales campos no sean observables. Es decir, junto con estos campos hay que proporcionar un mecanismo para aniquilarlos.

Para tratar de manera unificada con unos campos que conmutan y otros que anticonmutan, es adecuado introducir campos que tomen valores en fibrados vectoriales graduados. Un ejemplo sencillo de este tipo de fibrados lo proporciona el fibrado exterior asociado a un fibrado vectorial. Sus secciones son objetos $\phi \in \Gamma(\Lambda^\bullet E) = \Gamma(\Lambda^{(0)} E \oplus \Lambda^{(1)} E)$.

Formalismo BRST

Una manera de evitar el problema planteado por las ligaduras (formalismo BRST) consiste en introducir variables que anticonmutan. Esto implica utilizar unos campos (llamados fantasmas o *ghosts*) que cumplen unas relaciones espín-estadística no físicas. Su 'tiempo de vida' debe ser inferior al previsto por las relaciones de incertidumbre de Heisenberg, de manera que tales campos no sean observables. Es decir, junto con estos campos hay que proporcionar un mecanismo para aniquilarlos.

Para tratar de manera unificada con unos campos que conmutan y otros que anticonmutan, es adecuado introducir campos que tomen valores en fibrados vectoriales graduados. Un ejemplo sencillo de este tipo de fibrados lo proporciona el fibrado exterior asociado a un fibrado vectorial. Sus secciones son objetos $\phi \in \Gamma(\Lambda^{\bullet} E) = \Gamma(\Lambda^{(0)} E \oplus \Lambda^{(1)} E)$.

Para eliminar el efecto no físico de los campos fantasmas, se necesita el llamado *operador BRST*, $S : \Gamma(\Lambda^{(k)} E) \to \Gamma(\Lambda^{(k+1) \mathrm{mod} 2} E)$, que debe cumplir la condición de nilpotencia (en absoluto evidente)

$$\frac{1}{2}[S, S] = \frac{1}{2}(S \circ S - (-1)^{1 \cdot 1} S \circ S) = S^2 = 0.$$

Cohomología BRST

La cuantización de una teoría de campos con ligaduras conduce de manera natural a la consideración de una cohomología sobre $\Gamma(\Lambda^\bullet E)$ (en general, teniendo en cuenta la $\mathbb{Z}-$gradación, no sólo la $\mathbb{Z}_2-$gradación), donde el operador relevante es S, que tiene $\mathbb{Z}-$grado $+1$.

Cohomología BRST

La cuantización de una teoría de campos con ligaduras conduce de manera natural a la consideración de una cohomología sobre $\Gamma(\Lambda^\bullet E)$ (en general, teniendo en cuenta la $\mathbb{Z}-$gradación, no sólo la $\mathbb{Z}_2-$gradación), donde el operador relevante es S, que tiene $\mathbb{Z}-$grado $+1$.
El fibrado exterior $\Gamma(\Lambda^\bullet E)$ suele poseer una estructura adicional, la de una superálgebra de Poisson.

Cohomología BRST

La cuantización de una teoría de campos con ligaduras conduce de manera natural a la consideración de una cohomología sobre $\Gamma(\Lambda^\bullet E)$ (en general, teniendo en cuenta la $\mathbb{Z}-$gradación, no sólo la $\mathbb{Z}_2-$gradación), donde el operador relevante es S, que tiene $\mathbb{Z}-$grado $+1$.

El fibrado exterior $\Gamma(\Lambda^\bullet E)$ suele poseer una estructura adicional, la de una superálgebra de Poisson.

Una $\mathbb{R}-$álgebra graduada $\mathcal{A} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}^p$, cuyo producto denotaremos por $\triangle$, se dice que es una superálgebra de Poisson (de grado k) si existe un corchete $[\![\cdot,\cdot]\!] : \mathcal{A}^p \times \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^{p+q+k}$ tal que

(a) $(\mathcal{A}, [\![\cdot,\cdot]\!])$ es una superálgebra de Lie, en particular, para cualesquiera $A \in \mathcal{A}^a$, $B \in \mathcal{A}^b$, $C \in \mathcal{A}^c$, se tiene la 'identidad de Jacobi'

$$[\![A,[\![B,C]\!]]\!] = [\![[\![A,B]\!],C]\!] + (-1)^{(b+k)(a+k)}[\![B,[\![A,C]\!]]\!].$$

(b) Se cumple la 'regla de Leibniz'

$$[\![A, B \triangle C]\!] = [\![A,B]\!] \triangle C + (-1)^{(a+k)b} B \triangle [\![A,C]\!].$$

Ejemplos

(1) $E = TM$. El fibrado exterior $\Lambda^{\bullet}TM$ es el de los multivectores sobre M, que está provisto del corchete de Schouten: si $A \in \Lambda^a TM$, $B \in \Lambda^b TM$, $[\![A, B]\!] \in \Lambda^{a+b-1}TM$ es el elemento tal que $[\mathcal{L}_A, i_B] = i_{[\![A,B]\!]}$. Es una superálgebra de Poisson de grado $k = -1$.

Ejemplos

(1) $E = TM$. El fibrado exterior $\Lambda^\bullet TM$ es el de los multivectores sobre M, que está provisto del corchete de Schouten: si $A \in \Lambda^a TM$, $B \in \Lambda^b TM$, $[\![A, B]\!] \in \Lambda^{a+b-1} TM$ es el elemento tal que $[\mathcal{L}_A, i_B] = i_{[\![A,B]\!]}$. Es una superálgebra de Poisson de grado $k = -1$.

(2) $E = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, con $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. La estructura de superálgebra de Poisson se obtiene definiendo el corchete sobre los generadores y extendiendo a todo $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)$ como una derivación de grado -1. Así, si $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$,

$$[\![\alpha, X]\!] = \alpha(X) = [\![X, \alpha]\!], \quad [\![X, Y]\!] = 0 = [\![\alpha, \beta]\!].$$

Ejemplos

(1) $E = TM$. El fibrado exterior $\Lambda^\bullet TM$ es el de los multivectores sobre M, que está provisto del corchete de Schouten: si $A \in \Lambda^a TM$, $B \in \Lambda^b TM$, $[\![A, B]\!] \in \Lambda^{a+b-1} TM$ es el elemento tal que $[\mathcal{L}_A, i_B] = i_{[\![A,B]\!]}$. Es una superálgebra de Poisson de grado $k = -1$.

(2) $E = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, con $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. La estructura de superálgebra de Poisson se obtiene definiendo el corchete sobre los generadores y extendiendo a todo $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)$ como una derivación de grado -1. Así, si $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$,

$$[\![\alpha, X]\!] = \alpha(X) = [\![X, \alpha]\!], \quad [\![X, Y]\!] = 0 = [\![\alpha, \beta]\!].$$

Salvo producto tensorial por un factor con gradación trivial $\mathcal{C}^\infty(M)$, este es el espacio que aparece en la formulación original de BRST.

Ejemplos

(1) $E = TM$. El fibrado exterior $\Lambda^{\bullet}TM$ es el de los multivectores sobre M, que está provisto del corchete de Schouten: si $A \in \Lambda^{a}TM$, $B \in \Lambda^{b}TM$, $[\![A, B]\!] \in \Lambda^{a+b-1}TM$ es el elemento tal que $[\mathcal{L}_A, i_B] = i_{[\![A,B]\!]}$. Es una superálgebra de Poisson de grado $k = -1$.

(2) $E = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, con $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. La estructura de superálgebra de Poisson se obtiene definiendo el corchete sobre los generadores y extendiendo a todo $\Lambda^{\bullet}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)$ como una derivación de grado -1. Así, si $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*$,

$$[\![\alpha, X]\!] = \alpha(X) = [\![X, \alpha]\!], \quad [\![X, Y]\!] = 0 = [\![\alpha, \beta]\!].$$

Salvo producto tensorial por un factor con gradación trivial $\mathcal{C}^{\infty}(M)$, este es el espacio que aparece en la formulación original de BRST.

(3) $E = T^*M$ cuando $(M, \{\cdot, \cdot\})$ es una variedad de Poisson. De nuevo se tiene una superálgebra de Poisson de grado $k = -1$ al definir sobre los generadores de $\Omega(M) = \Lambda^{\bullet}T^*M$:

$$[\![f, g]\!] = 0, \quad [\![f, \mathrm{d}g]\!] = \{f, g\}, \quad [\![\mathrm{d}f, \mathrm{d}g]\!] = \mathrm{d}\{f, g\}.$$

Algebroides de Lie

Queremos generalizar las características comunes de los ejemplos anteriores.

Queremos generalizar las características comunes de los ejemplos anteriores.

Definición

Un algebroide de Lie es un triple $(E, [\cdot,\cdot], q)$, donde $E \to M$ es un fibrado vectorial real sobre la variedad M, $[\cdot,\cdot] : \Gamma E \times \Gamma E \to \Gamma E$ es un corchete de Lie en el $\mathcal{C}^\infty(M)-$módulo de las secciones de E, y $q : E \to TM$ es un morfismo de fibrados tal que, para cualesquiera $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $A, B \in \Gamma E$,

$$[A, fB] = f[A, B] + qA(f)B.$$

Algebroides de Lie

Queremos generalizar las características comunes de los ejemplos anteriores.

Definición

Un algebroide de Lie es un triple $(E, [\cdot,\cdot], q)$, donde $E \to M$ es un fibrado vectorial real sobre la variedad M, $[\cdot,\cdot] : \Gamma E \times \Gamma E \to \Gamma E$ es un corchete de Lie en el $\mathcal{C}^\infty(M)-$módulo de las secciones de E, y $q : E \to TM$ es un morfismo de fibrados tal que, para cualesquiera $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $A, B \in \Gamma E$,

$$[A, fB] = f[A, B] + qA(f)B.$$

Consecuencia: $q : \Gamma E \to \Gamma TM$ es también un morfismo de álgebras de Lie (donde en ΓTM se considera el corchete de Lie de campos vectoriales).

Queremos generalizar las características comunes de los ejemplos anteriores.

Definición

Un algebroide de Lie es un triple $(E, [\cdot,\cdot], q)$, donde $E \to M$ es un fibrado vectorial real sobre la variedad M, $[\cdot,\cdot] : \Gamma E \times \Gamma E \to \Gamma E$ es un corchete de Lie en el $\mathcal{C}^\infty(M)-$módulo de las secciones de E, y $q : E \to TM$ es un morfismo de fibrados tal que, para cualesquiera $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $A, B \in \Gamma E$,

$$[A, fB] = f[A,B] + qA(f)B.$$

Consecuencia: $q : \Gamma E \to \Gamma TM$ es también un morfismo de álgebras de Lie (donde en ΓTM se considera el corchete de Lie de campos vectoriales).
Ejercicio: ¿Cuál es la estructura de algebroide de los ejemplos anteriores?.

Operadores diferenciales en algebroides

Supongamos un algebroide de Lie $(E, [\cdot,\cdot], q)$. Definimos un operador $D : \Gamma(\Lambda^p E^*) \to \Gamma(\Lambda^{p+1} E^*)$ imitando las propiedades de d:

$$\begin{cases} Df(A) = qA(f) \\ D\alpha(A,B) = qA(\alpha(B)) - qB(\alpha(A)) - \alpha([A,B]), \end{cases}$$

para todos $f \in \mathcal{C}^\infty(M), \alpha \in \Gamma(\Lambda^1 E^*), A, B \in \Gamma E$, y extendiendo a $\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$ como una derivación de $\mathbb{Z}-$grado 1.

Operadores diferenciales en algebroides

Supongamos un algebroide de Lie $(E, [\cdot,\cdot], q)$. Definimos un operador $D : \Gamma(\Lambda^p E^*) \to \Gamma(\Lambda^{p+1} E^*)$ imitando las propiedades de d:

$$\begin{cases} Df(A) = qA(f) \\ D\alpha(A,B) = qA(\alpha(B)) - qB(\alpha(A)) - \alpha([A,B]), \end{cases}$$

para todos $f \in \mathcal{C}^\infty(M), \alpha \in \Gamma(\Lambda^1 E^*), A, B \in \Gamma E$, y extendiendo a $\Gamma(\Lambda^\bullet E^*)$ como una derivación de $\mathbb{Z}-$grado 1.

Teorema

D es un operador de cohomología, esto es,

$$D^2 = \frac{1}{2}[D,D] = \frac{1}{2}(D \circ D - (-1)^{1\cdot 1} D \circ D) = 0.$$

Ejemplo

Cuando $E = TM$ y $[\cdot,\cdot]$ es el corchete usual de Lie de campos vectoriales, el operador inducido en $\Gamma(\Lambda^\bullet TM^*) = \Omega(M)$ es la diferencial exterior d.

Ejemplo

Cuando $E = TM$ y $[\cdot,\cdot]$ es el corchete usual de Lie de campos vectoriales, el operador inducido en $\Gamma(\Lambda^\bullet TM^*) = \Omega(M)$ es la diferencial exterior d.

Es bien conocido que

$$\mathrm{d} = \mathcal{L}_{\mathrm{Id}}$$

donde $\mathrm{Id} : TM \to TM$ es el morfismo identidad.

Ejemplo

Cuando $E = TM$ y $[\cdot,\cdot]$ es el corchete usual de Lie de campos vectoriales, el operador inducido en $\Gamma(\Lambda^\bullet TM^*) = \Omega(M)$ es la diferencial exterior d.

Es bien conocido que

$$\mathrm{d} = \mathcal{L}_{\mathrm{Id}}$$

donde $\mathrm{Id} : TM \to TM$ es el morfismo identidad.

Pregunta 1: ¿Podemos generalizar una fórmula de este tipo?.

Ejemplo

Cuando $E = TM$ y $[\cdot,\cdot]$ es el corchete usual de Lie de campos vectoriales, el operador inducido en $\Gamma(\Lambda^{\bullet}TM^{*}) = \Omega(M)$ es la diferencial exterior d.

Es bien conocido que

$$\mathrm{d} = \mathcal{L}_{\mathrm{Id}}$$

donde $\mathrm{Id} : TM \to TM$ es el morfismo identidad.

Pregunta 1: ¿Podemos generalizar una fórmula de este tipo?.

Pregunta 2: ¿Podemos clasificar de alguna manera los operadores de cohomología inducidos por algebroides de Lie?.

Ejemplo

Cuando $E = TM$ y $[\cdot,\cdot]$ es el corchete usual de Lie de campos vectoriales, el operador inducido en $\Gamma(\Lambda^\bullet TM^*) = \Omega(M)$ es la diferencial exterior d.

Es bien conocido que

$$\mathrm{d} = \mathcal{L}_{\mathrm{Id}}$$

donde $\mathrm{Id} : TM \to TM$ es el morfismo identidad.

Pregunta 1: ¿Podemos generalizar una fórmula de este tipo?.

Pregunta 2: ¿Podemos clasificar de alguna manera los operadores de cohomología inducidos por algebroides de Lie?.

La respuesta a la primera pregunta es fácil. Para la segunda, se tienen algunos resultados parciales.

Teorema

Sean $\pi : F \to M$ fibrado vectorial, $\delta \in \mathrm{Der}\Gamma(\Lambda F)$, y ∇ conexión lineal en F^*. Entonces, existen unos campos tensoriales únicos, $K \in \Gamma(F \otimes TM)$ y $L \in \Gamma(\Lambda^2 F \otimes F^*)$, tales que

$$\delta = \nabla_K + i_L.$$

Teorema

Sean $\pi : F \to M$ fibrado vectorial, $\delta \in \mathrm{Der}\Gamma(\Lambda F)$, y ∇ conexión lineal en F^*. Entonces, existen unos campos tensoriales únicos, $K \in \Gamma(F \otimes TM)$ y $L \in \Gamma(\Lambda^2 F \otimes F^*)$, tales que

$$\delta = \nabla_K + i_L.$$

Teorema

Sea el algebroide $(E, [\![\ ,\ ]\!], q)$. Dada una conexión simétrica ∇ en E, el operador de cohomología D se descompone como

$$D = \nabla_q + i_{L^\nabla},$$

donde $L^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2 E^* \otimes E)$, la $q-$torsión de ∇, es (para $A, B \in \Gamma E$):

$$L^\nabla(A, B) = \nabla_{qA} B - \nabla_{qB} A - [\![A, B]\!].$$

La relación entre el corchete de Lie sobre las secciones de un algebroide de Lie y el correspondiente operador diferencial D, es reversible. Se puede definir $[\![A, B]\!]$ mediante:

$$\alpha([\![A, B]\!]) = qA(\alpha(B)) - qB(\alpha(A)) - D\alpha(A, B).$$

La relación entre el corchete de Lie sobre las secciones de un algebroide de Lie y el correspondiente operador diferencial D, es reversible. Se puede definir $[\![A,B]\!]$ mediante:

$$\alpha([\![A,B]\!]) = qA(\alpha(B)) - qB(\alpha(A)) - D\alpha(A,B).$$

Teorema

Sea $N : \Gamma TM \to \Gamma TM$ un endomorfismo de fibrados invertible. Entonces, una derivación de la forma

$$D = \mathcal{L}_N + i_L \in \mathrm{Der}^1\Omega(M),$$

(con $L \in \Omega^2(M;TM)$) es de cuadrado nulo, de manera que determina un algebroide en TM, si y sólo si

$$L = -N^{-1}T_N,$$

donde T_N es la torsión de Nijenhuis de N.

Corolario

Si N es una estructura casi-compleja o casi-producto, los únicos operadores de la forma $D = \mathcal{L}_N + i_L$ que son de cuadrado nulo ($D^2 = 0$), son aquellos para los cuales

$$L = -N^{-1} T_N.$$

Corolario

Si N es una estructura casi-compleja o casi-producto, los únicos operadores de la forma $D = \mathcal{L}_N + i_L$ que son de cuadrado nulo ($D^2 = 0$), son aquellos para los cuales

$$L = -N^{-1} T_N.$$

Trabajando un poco más, se puede obtener un resultado análogo para el caso en que N no es invertible, por ejemplo, para estructuras casi-producto. De esta forma, se tienen resultados que cubren las llamadas *csp estructuras*, íntimamente relacionadas con las *geometrías complejas generalizadas* y los *algebroides de Courant*...