Problema de Dirichlet para el modelo de Thirring en semirrecta

Ivan Naumkin

Diciembre 4, 2015

Consideremos el problema de valor inicial-frontera (IBV) para la ecuación no lineal de Dirac con valores de frontera no homogéneos de Dirichlet

$$\begin{cases} i\left(\partial_t + \alpha\partial_x\right)\psi + \beta\psi = \langle\beta\psi, \psi\rangle\beta\psi, \ x > 0, \ t > 0, \\ \psi\left(x, 0\right) = \psi_0\left(x\right), \ x > 0, \\ \psi\left(0, t\right) = h\left(t\right), \ t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\psi = \psi\left(x, t\right) = \begin{pmatrix} \psi_1\left(x, t\right) \\ \psi_2\left(x, t\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, α, β son matrices hermitianas de (2×2) que satisfacen $\beta^2 = \alpha^2 = I$, y las relaciones de anticonmutación

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 0,$$

y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto escalar en $\mathbb{C}^2$. Note que una representación particular de las matrices α y β viene dada por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teorema

Sea $\psi_0 \in \mathcal{H}^{2,1}\left(\mathbb{R}^+;\mathbb{C}^2\right)$, $h(t) \in \mathcal{H}^{1,2}\left(\mathbb{R}^+;\mathbb{C}^2\right)$ *y la norma* $\|\psi_0\|_{\mathcal{H}^{2,1}(\mathbb{R}^+;\mathbb{C}^2)} + \|h\|_{\mathcal{H}^{1,2}(\mathbb{R}^+;\mathbb{C}^2)} = \varepsilon$. *Además, supongamos que la condición de compatibilidad* $\psi_0(0) = h(0)$ *es satisfecha. Entonces, existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para todos* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *el problema IBV (1) tiene una única solución global*

$$\psi\left(t\right) \in C^1\left(\left[0,\infty\right);\mathcal{H}^{2,1}\left(\mathbb{R}^+;\mathbb{C}^2\right)\right).$$

Además, la estimación

$$\left\|\psi\left(t\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{C}^2)} \leq C\left(1+t\right)^{-\frac{1}{2}}$$

es cierta.

Consideremos el problema IBV para la ecuación lineal de Dirac

$$\begin{cases} i\left(\partial_t + \alpha\partial_x\right)\psi + \beta\psi = g(x,t),\ \ x>0,\ t>0, \\ \psi\left(x,0\right) = \psi_0\left(x\right),\ \ x>0, \\ \psi\left(0,t\right) = h\left(t\right),\ \ \ t>0. \end{cases} \tag{I}$$

Trasladamos el problema anterior a

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(I_4 \partial_t + i\gamma \left\langle \partial_x \right\rangle\right) u = f\left(x, t\right),\ \ t > 0,\ x > 0, \\ u(x, 0) = u_0,\ \ x > 0, \\ u(0, t) = \frac{1}{2} \mathbf{B} h(t),\ \ t > 0, \end{array} \right. \qquad \text{(II)}$$

donde $\left\langle \partial_x \right\rangle \phi := \mathcal{F}_s \left\langle p \right\rangle \mathcal{F}_s \left(\phi - e^{-x}\phi(0)\right)$, ($\left\langle p \right\rangle := \sqrt{1 + p^2}$), $\left\langle \partial_x \right\rangle^{-1} := \mathcal{F}_s \frac{1}{\left\langle p \right\rangle} \mathcal{F}_s$,

$$f\left(x, t\right) := \frac{i}{2} \left\langle \partial_x \right\rangle^{-1} \mathbf{C} \left(-i\partial_t + i\alpha\partial_x + \beta\right) g\left(x, t\right),$$

$$u_0 := \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}\psi_0 + i\mathbf{C} \left(\left\langle \partial_x \right\rangle^{-1} \nu \right) \right),$$

$$\nu(x) = -\alpha\psi_0'\left(x\right) + i\beta\psi_0\left(x\right) - i\left\langle \beta\psi_0, \psi_0 \right\rangle \beta\psi_0,$$

y las matrices γ, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ están definidas como

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

and

$$\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposición

Supongamos que $\psi_0,\ \nu,\ h \in \left(L^1(\mathbf{R}^+) \cap L^2(\mathbf{R}^+)\right)^2$ *y* $g \in \left(\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+)\right)^2$. *Entonces las soluciones* $\psi(x,t)$ *y* $u(x,t)$ *a los problemas (I) y (II) se relacionan por*

$$\psi(x,t) = \mathbf{A}u(x,t).$$

Además,

$$u(x,t) = \mathcal{G}(t)\left\{ u_0 + \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\mathcal{F}_s \tfrac{p}{\langle p \rangle} \int_0^t e^{i\gamma\langle p \rangle \tau} \tfrac{i}{2} \mathbf{C} h(\tau) d\tau \right\} + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) f(x,\tau) d\tau,$$

donde

$$\mathcal{G}(t)\phi := \mathcal{F}_s e^{-i\gamma\langle p \rangle t} \mathcal{F}_s \phi = \mathcal{F}_s \left(\cos\langle p \rangle t - i\gamma \sin\langle p \rangle t\right) \mathcal{F}_s \phi.$$

Consideremos entonces el siguiente problema no lineal

$$\begin{cases} (I_4\partial_t + i\gamma\langle\partial_x\rangle)\, u = \mathcal{N}(u), \ \ t > 0,\ x > 0, \\ u(x,0) = u_0, \ \ x > 0, \\ u(0,t) = \frac{1}{2}\mathbf{B}h(t), \ \ t > 0, \end{cases} \tag{III}$$

donde

$$\mathcal{N}(u) := \frac{i}{2}\langle\partial_x\rangle^{-1}\mathbf{C}\left(-i\partial_t + i\alpha\partial_x + \beta\right)\langle\beta\mathbf{A}u, \mathbf{A}u\rangle\,\beta\mathbf{A}u.$$

Usando la proposición anterior tenemos

$$u(x,t) = \mathcal{G}(t)\left\{ u_0 + \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\mathcal{F}_s \tfrac{p}{\langle p\rangle} \int\limits_0^t e^{i\gamma\langle p\rangle\tau} \tfrac{i}{2}\mathbf{C}h(\tau)d\tau \right\} +$$
$$+ \int\limits_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)d\tau,$$

con

$$\mathcal{N}(u) = \frac{i}{2}\langle\partial_x\rangle^{-1}\mathbf{C}\left(-i\partial_t + i\alpha\partial_x + \beta\right)\langle\beta\mathbf{A}u, \mathbf{A}u\rangle\beta\mathbf{A}u.$$

Para $T > 0$, definimos el siguiente espacio

$$\mathbf{X}_T := \left\{ \phi \in C\left([0, T]\,; L^2\right); \|\phi\|_{\mathbf{X}_T} < \infty \right\},$$

con

$$\|\phi\|_{\mathbf{X}_T} = \sup_{t \in [0,T]} \langle t \rangle^{-\sigma} \left(\|\mathcal{J}\phi(t)\|_{\mathcal{H}^2} + \|\phi(t)\|_{\mathcal{H}^2} \right. \\ \left. + \langle t \rangle^{-1} \|\phi(t)\|_{\mathcal{H}^{2,1}} + \langle t \rangle^{\frac{1}{2}+\sigma} \|\phi(t)\|_{\infty} \right), \quad \sigma > 0,$$

donde el operador $\mathcal{J}$ se define como

$$\mathcal{J} := x I_{4\times 4} + it\gamma\partial_x \frac{1}{\langle \partial_x \rangle}.$$

Para probar nuestro resultado usamos el teorema de existencia local para el problema (III) en el espacio $\mathbf{X}_T$:

Teorema

Sea $u_0 \in \mathcal{H}^{2,1}$, $h(t) \in \mathcal{H}^{1,2}$ *y la norma* $\|u_0\|_{\mathcal{H}^{2,1}} + \|h\|_{\mathcal{H}^{1,2}} = \varepsilon$ *. Supongamos que* $u_0(0) = h(0)$*. Entonces, existe* $\varepsilon_0 > 0$ *y* $T > 1$ *tales que para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *el problema (III) tiene una única solución* $u \in C\left([0, T]; \mathcal{H}^{2,1}\right)$ *que satisface la estimación* $\|u\|_{\mathbf{X}_T} < \sqrt{\varepsilon}$*.*

Mostremos que el tiempo T se puede extender a infinito. Supongamos que eso no es cierto. Entonces, por continuidad, existe el tiempo mínimo $T > 0$ tal que la estimación $\|u\|_{\mathbf{X}_T} < \sqrt{\varepsilon}$ no se satisface, lo que implica que $\|u\|_{\mathbf{X}_T} = \sqrt{\varepsilon}$. Probaremos que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño $\|u\|_{\mathbf{X}_T} < \sqrt{\varepsilon}$, lo que nos llevará a una contradicción. Recordemos que

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{\mathbf{X}_T} = \sup_{t\in[0,T]} \langle t\rangle^{-\sigma} \big(&\|\mathcal{J}\phi(t)\|_{\mathcal{H}^2} + \|\phi(t)\|_{\mathcal{H}^2} \\ &+ \langle t\rangle^{-1} \|\phi(t)\|_{\mathcal{H}^{2,1}} + \langle t\rangle^{\frac{1}{2}+\sigma} \|\phi(t)\|_{\infty} \Big). \end{aligned}$$

Para probar que $\|u\|_{\mathbf{X}_T} < \sqrt{\varepsilon}$, demostremos que

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq C\varepsilon \langle t\rangle^{-\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{\mathcal{H}^2} \leq C\varepsilon \langle t\rangle^{\sigma},$$

$$\|\mathcal{J}u\|_{\mathcal{H}^2} \leq C\varepsilon \langle t\rangle^{\sigma} \quad \text{y} \quad \|u\|_{\mathcal{H}^{2,1}} \leq C\varepsilon \langle t\rangle^{1+\sigma}.$$

Mostremos que

$$\|u(t)\|_\infty \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}}.$$

Por construcción

$$\left(I_4\partial_t + i\gamma \langle \partial_x \rangle\right) \mathcal{G}(t) = 0.$$

Haciendo el cambio $u = \mathcal{G}(t)\phi$ e introduciendo esta expresión en la ecuación para u,

$$\left(I_4\partial_t + i\gamma \langle \partial_x \rangle\right) u = \mathcal{N}(u),$$

llegamos a

$$\langle p \rangle \partial_t \mathcal{F}_s \phi(p,t) = e^{i\gamma\langle p \rangle t} \mathcal{F}_s \mathcal{N}\left(\mathcal{G}\phi\right).$$

Proposición

La expansión asintótica

$$\begin{aligned}&(\mathcal{G}(t)\phi)(x)\\ &= -\frac{i}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{x}{t}\right)\left\langle ixt^{-1}\right\rangle^{-\frac{3}{2}}\gamma e^{-i\gamma\left(t\left\langle ixt^{-1}\right\rangle+\frac{\pi}{4}\right)}(\mathcal{F}_s\phi)\left(\frac{xt^{-1}}{\langle ixt^{-1}\rangle}\right)+R,\end{aligned}$$

es cierta, donde R *satisface*

$$\|R\|_\infty \leq Ct^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\|\mathcal{F}_s\phi\|_{\mathcal{H}^{1,2}}, \quad \varepsilon > 0.$$

y

$$\theta(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Usando el resultado anterior tenemos

$$\|u\|_{\infty} = \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\infty} \leq C\left(1+t\right)^{-\frac{1}{2}}\|\mathcal{F}_s\phi\|_{\infty}.$$

Entonces necesitamos estimar $\|\mathcal{F}_s\phi\|_{\infty}$. Para ello, consideremos dos regiones $\langle p\rangle \leq t^{2\sigma}$ y $\langle p\rangle \geq t^{2\sigma}$ ($\sigma > 0$).

Supongamos que $\langle p\rangle \leq t^{2\sigma}$. Usando la asintótica de $\mathcal{G}(t)$ tenemos

$$\mathcal{F}_s\mathcal{N}\left(\mathcal{G}\phi\right) = \frac{i}{t}e^{-i\gamma t\langle p\rangle}\mathbf{E}\chi(p,t) + \frac{1}{t}\Lambda\left(t,p\right) + \mathbf{R},$$

donde denotamos $\chi(p,t) := \langle p\rangle \mathcal{F}_s\phi(p,t)$, la matriz $\mathbf{E}\left(p\right)$ tiene solo valores propios reales y 4 vectores propios linealmente independientes para todo p,

$$\begin{gathered}\Lambda\left(t,p\right) := \\ := \left(-\tfrac{i}{2}e^{i\gamma t\langle p\rangle}\mathbf{F} - \tfrac{i}{2}e^{-3i\gamma t\left\langle\frac{p}{3}\right\rangle}\mathbf{I} + \tfrac{i}{2}e^{3i\gamma t\left\langle\frac{p}{3}\right\rangle}\mathbf{J}\right)\chi(p,t),\end{gathered}$$

con matrices $\mathbf{F}, \mathbf{I}, \mathbf{J}$ de dimensiones 4×4, que dependen de p y $\chi(p,t)$, y $\mathbf{R} = O\left(t^{-1-\delta}\left\|\mathcal{F}_s\phi\right\|^3_{\mathcal{H}^{1,2}}\right)$ en L^∞, $\delta > 0$.

Multiplicando por $\langle p\rangle^{\frac{1}{2}}$ los dos lados de la ecuación

$$\langle p\rangle\, \partial_t \mathcal{F}_s \phi(p,t) = e^{i\gamma\langle p\rangle t} \mathcal{F}_s \mathcal{N}\left(\mathcal{G}\phi\right),$$

y usando que

$$\mathcal{F}_s \mathcal{N}\left(\mathcal{G}\phi\right) = \frac{i}{2t} e^{-i\gamma t\langle p\rangle} \mathbf{E}\chi(p,t) + \frac{1}{t}\Lambda\left(t,p\right) + \mathbf{R},$$

llegamos a

$$\partial_t \chi = \frac{i}{2t}\left\langle p\right\rangle^{-1} \mathbf{E}\left(p;\chi(p,t)\right)\chi(p,t) + \\ + e^{i\gamma\langle p\rangle t}\left\langle p\right\rangle^{-1} \Lambda\left(t,p;\chi(p,t)\right) + \left\langle p\right\rangle^{1/2} e^{i\gamma\langle p\rangle t}\mathbf{R}$$

donde $\chi(p,t) := \left\langle p\right\rangle^{3/2} \mathcal{F}_s\phi(p,t)$.

Lema

Supongamos que $\chi^0 \in L^\infty$ *es tal que* $\|\chi^0\|_\infty = \varepsilon$. *Entonces existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *el problema inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{d\chi}{dt} = \dfrac{i}{2t} \langle p \rangle^{-1} \mathbf{E}\left(p; \chi(p)\right) \left(\chi(p)\right) + \\ + \langle p \rangle^{-1} e^{i\gamma t \langle p \rangle} \Lambda\left(t, p; \chi(p)\right) + \langle p \rangle^{1/2} \mathbf{R}, \\ \chi\left(1, p\right) = \chi^0, \end{cases}$$

tiene una única solución $\chi \in C\left(\left[1, \infty\right); L^\infty\left(\langle p \rangle \leq t^{2\sigma}\right)\right)$, *que satisface*

$$\sup_{\langle p \rangle \leq t^{2\sigma}} \left|\chi(p)\right| \leq C\varepsilon$$

uniformemente en t.

Usando el lema anterior concluimos que

$$\sup_{\langle p \rangle \leq t^{2\sigma}} \left| \langle p \rangle^{3/2} \mathcal{F}_s \phi(p, t) \right| \leq C\varepsilon.$$

En el caso $\langle p \rangle \geq t^{2\sigma}$, por el teorema de Sobolev tenemos

$$\begin{aligned} \sup_{\langle p \rangle \geq t^{2\sigma}} \left| \langle p \rangle^{\frac{3}{2}} \mathcal{F}_s \phi \right| &= \langle t \rangle^{-\sigma} \sup_{\langle p \rangle \geq t^{2\sigma}} \left| \langle p \rangle^{2} \mathcal{F}_s \phi \right| \\ &\leq C \langle t \rangle^{-\sigma} \left\| \mathcal{F}_s \phi \right\|_{\mathcal{H}^{1,2}} . \end{aligned}$$

Si $\left\| \mathcal{F}_s \phi \right\|_{\mathcal{H}^{1,2}} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{\sigma}$, obtenemos la estimación

$$\sup_{\langle p \rangle \geq t^{2\sigma}} \left| \langle p \rangle^{\frac{3}{2}} \mathcal{F}_s \phi \right| \leq C\varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\left| \langle p \rangle^{\frac{3}{2}} \mathcal{F}_s \phi \right| \leq C\varepsilon$$

para todo $p \geq 0$.

Mostremos ahora que

$$\|\mathcal{F}_s \phi\|_{\mathcal{H}^{1,2}} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{\sigma} . \tag{2}$$

Notemos

$$\|\mathcal{F}_s \phi\|_{\mathcal{H}^{1,2}} = \|\mathcal{J} u\|_{\mathcal{H}^2} + \|u\|_{\mathcal{H}^2} .$$

Entonces, (2) se sigue de las estimaciones

$$\|\mathcal{J} u\|_{\mathcal{H}^2} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{\sigma}$$

y

$$\|u\|_{\mathcal{H}^2} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{\sigma} .$$

Para probar las ultimas dos desigualdades regresamos a la representación integral de la solución u

$$u = \mathcal{G}(t)\phi_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)d\tau,$$

donde

$$\phi_0(x,t) = u_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{F}_s \frac{p}{\langle p\rangle}\int_0^t e^{i\gamma\langle p\rangle\tau}\frac{i}{2}\mathbf{C}h(\tau)d\tau.$$

La estimación

$$\|u\|_{\mathcal{H}^2} \le C\varepsilon \langle t\rangle^{\sigma}$$

se sigue de

$$\|\mathcal{G}(t)\phi_0\|_{\mathcal{H}^2} \le C\left(\|h\|_{\mathcal{H}^{1,1}} + \|u_0\|_{\mathcal{H}^2}\right), \qquad (3)$$

$$\left\|\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\langle\partial_x\rangle^{-1}\mathcal{N}(u)d\tau\right\|_{\mathcal{H}^2} \le C\|h\|^3_{\mathcal{H}^{1,1}} + C\int_0^t \|u\|^2_{\infty}\|u\|_{\mathcal{H}^1}d\tau. \qquad (4)$$

y la suposición $\|u\|_{\mathbf{X}_T} = \sqrt{\varepsilon}$.
Note que la condición de compatibilidad $\psi_0(0) = h(0)$ aparece en la prueba de (3), ya que se usa

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathcal{H}^2} \le \|\phi\|_{\mathcal{H}^2},$$

lo que es cierto si $\phi(0) = 0$.

Para mostrar

$$\|\mathcal{J}u\|_{\mathcal{H}^2} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{\sigma},$$

multiplicamos la representación integral de u por $\mathcal{J}$ para obtener

$$\mathcal{J}u = \mathcal{J}\mathcal{G}(t)\phi_0 + \mathcal{J}\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \langle \partial_x \rangle^{-1} \mathcal{N}(u) d\tau.$$

Entonces usamos

$$\|\mathcal{J}\mathcal{G}\phi_0\|_{\mathcal{H}^2} \leq C \|u_0\|_{\mathcal{H}^{2,1}} + C \|h\|_{\mathcal{H}^{1,2}},$$

y

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{J}\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \langle \partial_x \rangle^{-1} \mathcal{N}(u) d\tau \right\|_{\mathcal{H}^2} \\ &\leq C \int_0^t \|u\|_\infty^2 \left(\|\mathcal{N}(u)\|_{L^{2,1}} + \|\partial_\tau u\| + \|\mathcal{J}u\|_{\mathcal{H}^2} \right. \\ &\qquad \left. + \|u\|_{\mathcal{H}^1} + \|h\|_{\mathcal{H}^{1,1}} + \|h\|_{\mathcal{H}^1} \right) d\tau \\ &+ \|h\|_{\mathcal{H}^{1,1}}^3 + \|u_0\|_{\mathcal{H}^{1,1}}^3 + \|u\|_\infty^2 \|u\|_{\mathcal{H}^{1,1}} + t \|u\|_\infty^2 \|u\|_{\mathcal{H}^1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Observando que

$$\|\mathcal{N}(u)\|_{L^{2,1}} \leq C\,\|u\|_{\infty}^{2}\left(\|\partial_t u\|_{L^{2,1}} + \|u\|_{\mathcal{H}^{1,1}}\right),$$

$$\|\partial_t u\|_{L^{2,1}} \leq C\left(\|u\|_{L^{2,1}} + \|h\|_{\infty} + \|u\|_{\infty}^{2}\,\|u\|_{\mathcal{H}^{1,1}}\right),$$

y recordando que $\|u\|_{\mathbf{X}_T} = \sqrt{\varepsilon}$, llegamos a

$$\|\mathcal{J}u\|_{\mathcal{H}^{2}} \leq C\varepsilon\,\langle t\rangle^{\sigma}.$$

Finalmente de las relaciones $xu = \mathcal{J}u - it\gamma\partial_x \frac{1}{\langle \partial_x \rangle} u$,

$$\|u\|_{\mathcal{H}^2} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{\sigma},$$

$$\|\mathcal{J}u\|_{\mathcal{H}^2} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{\sigma}$$

y $\|u\|_{\mathbf{X}_T} = \sqrt{\varepsilon}$, se sigue que

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{2,1}} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{1+\sigma}.$$

Usando la última desigualdad junto a

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{\mathcal{H}^2} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{\sigma},$$

y

$$\|\mathcal{J}u\|_{\mathcal{H}^2} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{\sigma} \quad ,$$

vemos que

$$\|u\|_{\mathbf{X}_T} = \sup_{t\in[0,T]} \langle t \rangle^{-\sigma} \left(\|\mathcal{J}u\|_{\mathcal{H}^2} + \|u\|_{\mathcal{H}^2} \right.$$
$$\left. + \langle t \rangle^{-1} \|u\|_{\mathcal{H}^{2,1}} + \langle t \rangle^{\frac{1}{2}+\sigma} \|u\|_{\infty} \right) \leq C\varepsilon < \sqrt{\varepsilon},$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, lo que contradice la suposición $\|u\|_{\mathbf{X}_T} = \sqrt{\varepsilon}$.

Consideremos el problema IBV para la ecuación lineal de Dirac

$$\begin{cases} i\left(\partial_t + \alpha\partial_x\right)\psi + \beta\psi = g(x,t), \;\; x > 0, \; t > 0, \\ \psi\left(x,0\right) = \psi_0\left(x\right), \;\; x > 0, \\ \psi\left(0,t\right) = h\left(t\right), \quad t > 0. \end{cases}$$

Aplicando el operador $\mathcal{D}_{-} := -i\partial_t + i\alpha\partial_x + \beta$ a la ecuación de Dirac

$$i\left(\partial_t + \alpha\partial_x\right)\psi + \beta\psi = g(x,t)$$

obtenemos

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2 + I\right)\psi = f(x,t).$$

Entonces tenemos el siguiente problema IBV

$$\left\{\begin{array}{c} \psi_{tt} - \psi_{xx} + \psi = f(x,t),\ \ t > 0,\ x > 0, \\ \psi\left(x,0\right) = \psi_0(x),\ \ \psi_t\left(x,0\right) = \psi_1(x),\ \ x > 0, \\ \psi(0,t) = h(t),\ \ t > 0, \end{array}\right.$$

donde $\psi_1(x) := -\alpha\psi_0'\left(x\right) + i\beta\psi_0\left(x\right) - ig\left(x,0\right).$

Aplicando la transformada de Laplace espacial y temporal a la ecuación

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + \psi = f(x,t)$$

obtenemos para $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} \xi > 0$,

$$\widehat{\widehat{\psi}}(p,\xi) = \frac{1}{\xi^2 + 1 - p^2}$$
$$\times \left(-p\widehat{\psi}(0,\xi) - \widehat{\psi}_x(0,\xi) + \widehat{\widehat{f}}(p,\xi) + \xi\widehat{\psi}_0(p) + \widehat{\psi}_1(p) \right) .$$

Aquí las funciones $\widehat{\widehat{\psi}}(p,\xi)$, $\widehat{\psi}(0,\xi)$, $\widehat{\psi}_x(0,\xi)$, $\widehat{\widehat{f}}(p,\xi)$, $\widehat{\psi}_0(p)$ y $\widehat{\psi}_1(p)$ son las transformadas de Laplace de $\psi(x,t)$, $\psi(0,t)$, $\psi_x(0,t)$, $f(x,t)$, $\psi_0(x)$ y $\nu(x)$, respectivamente.

Como el lado izquierdo es analítico para $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} \xi > 0$ y la función $\dfrac{1}{\xi^2 + 1 - p^2}$ tiene un polo en el punto $p = \langle \xi \rangle$ llegamos a la condición

$$\begin{gathered} -\langle \xi \rangle \, \widehat{\psi}(0,\xi) - \widehat{\psi}_x(0,\xi) + \widehat{\widehat{f}}(\langle \xi \rangle, \xi) \\ +\xi \widehat{\psi}_0(\langle \xi \rangle) + \widehat{\psi}_1(\langle \xi \rangle) = 0. \end{gathered}$$

Entonces, como $\psi(0,t) = h(t)$,

$$\widehat{\psi}_x(0,\xi) = \widehat{\widehat{f}}(\langle \xi \rangle, \xi) + \xi \widehat{\psi}_0(\langle \xi \rangle) + \widehat{\psi}_1(\langle \xi \rangle) - \langle \xi \rangle \, \widehat{h}(\xi).$$

Sustituyendo

$$\widehat{\psi}_x(0,\xi) = \widehat{\widehat{f}}(\langle\xi\rangle,\xi) + \xi\widehat{\psi}_0(\langle\xi\rangle) + \widehat{\psi}_1(\langle\xi\rangle) - \langle\xi\rangle\,\widehat{h}(\xi).$$

en

$$\widehat{\widehat{\psi}}(p,\xi) = \frac{1}{\xi^2+1-p^2} \times \left(-p\widehat{\psi}(0,\xi) - \widehat{\psi}_x(0,\xi) + \widehat{\widehat{f}}(p,\xi) + \xi\widehat{\psi}_0(p) + \widehat{\psi}_1(p)\right)$$

y tomando la transformada de Laplace inversa obtenemos

$$\psi(x,t) = \int_0^\infty \left(G_t(x,y,t)\psi_0(y) + G(x,y,t)\nu(y)\right) dy + \int_0^t \left(G_y(x,0,t-\tau)h(\tau) + \int_0^\infty dy f(y,\tau)G(x,y,t-\tau)\right) d\tau,$$

donde

$$G(x, y, t) :=$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} d\xi e^{\xi t} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{px} \frac{1}{\xi^2+1-p^2} \left(e^{-\langle \xi \rangle y} - e^{-py} \right) dp, \quad \varepsilon > 0.$$

Se puede mostrar que

$$G(x, y, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}_s \frac{\sin \langle p \rangle t}{\langle p \rangle} \sin py.$$

Usando la expresión $G(x, y, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}_s \frac{\sin\langle p\rangle t}{\langle p\rangle} \sin py$ llegamos a

$$\psi(x,t) = \mathcal{F}_s \cos\langle p\rangle\, t \mathcal{F}_s \psi_0 + \mathcal{F}_s \frac{\sin\langle p\rangle t}{\langle p\rangle} \mathcal{F}_s \nu$$

$$+ \int\limits_0^t \mathcal{F}_s \frac{\sin\langle p\rangle (t-\tau)}{\langle p\rangle} \mathcal{F}_s f(p,\tau) d\tau + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t \mathcal{F}_s \frac{p \sin\langle p\rangle (t-\tau)}{\langle p\rangle} h(\tau) d\tau.$$

Recordemos que la solución u del problema

$$\begin{cases} \left(I_4\partial_t + i\gamma \langle\partial_x\rangle\right) u = f(x,t), \ \ t>0, \ x>0, \\ u(x,0) = u_0, \ \ x>0, \\ u(0,t) = \frac{1}{2}\mathbf{B}h(t), \ \ t>0, \end{cases}$$

está relacionado a ψ por

$$u = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}\psi + i\mathbf{C}\left(\langle\partial_x\rangle^{-1}\partial_t\psi\right)\right).$$

Introduciendo la expresión para $\psi(x,t)$ en la última igualdad obtenemos

$$u = \mathcal{G}(t)\phi_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)d\tau.$$

con

$$\phi_0(x,t) = u_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{F}_s\frac{p}{\langle p\rangle}\int_0^t e^{i\gamma\langle p\rangle\tau}\frac{i}{2}\mathbf{C}h(\tau)d\tau.$$

donde

$$\mathcal{G}(t)\phi = \mathcal{F}_s e^{-i\gamma\langle p\rangle t}\mathcal{F}_s\phi.$$