Construcciones con el método de forcing

Ulises Ariet RAMOS GARCÍA

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM-Morelia
ariet@matmor.unam.mx

Instituto de Matemáticas, UNAM
Diciembre 2015

Contenido

La teoría de conjuntos:

- Tiene sus orígenes en la teoría de Cantor sobre los ordinales y cardinales transfinitos.
- Es una teoría matemática del infinito.
- Es el fundamento sobre el cual descansan todas las demás teoría matemáticas, en el sentido de que prácticamente toda la matemática puede, en principio, reducirse formalmente a la teoría de conjuntos.

La teoría de conjuntos:

- Tiene sus orígenes en la teoría de Cantor sobre los ordinales y cardinales transfinitos.
- Es una teoría matemática del infinito.
- Es el fundamento sobre el cual descansan todas las demás teoría matemáticas, en el sentido de que prácticamente toda la matemática puede, en principio, reducirse formalmente a la teoría de conjuntos.

La teoría de conjuntos:

- Tiene sus orígenes en la teoría de Cantor sobre los ordinales y cardinales transfinitos.
- Es una teoría matemática del infinito.
- Es el fundamento sobre el cual descansan todas las demás teoría matemáticas, en el sentido de que prácticamente toda la matemática puede, en principio, reducirse formalmente a la teoría de conjuntos.

La teoría de conjuntos:

- Tiene sus orígenes en la teoría de Cantor sobre los ordinales y cardinales transfinitos.
- Es una teoría matemática del infinito.
- Es el fundamento sobre el cual descansan todas las demás teoría matemáticas, en el sentido de que prácticamente toda la matemática puede, en principio, reducirse formalmente a la teoría de conjuntos.

La teoría de conjuntos:

- Tiene sus orígenes en la teoría de Cantor sobre los ordinales y cardinales transfinitos.
- Es una teoría matemática del infinito.
- Es el fundamento sobre el cual descansan todas las demás teoría matemáticas, en el sentido de que prácticamente toda la matemática puede, en principio, reducirse formalmente a la teoría de conjuntos.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los principios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y el P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos infinitos de ω
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamond$ de Jensen
  - Los princios $\diamond$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Las herramientas modernas de la teoría de conjuntos tales como:

- Principios combinatorios
  - El principio $\diamondsuit$ de Jensen
  - Los princios $\diamondsuit$ parametrizados
- Forcing
  - Axiomas de forcing: el Axioma de Martin (MA), el Proper Forcing Axiom (PFA), el Open Coloring Axiom (OCA) y la P-Ideal Dichotomy (PID).
  - Técnicas de forcing iterado
- Teoría de Ramsey infinita
  - Cálculo de particiones
  - Combinatoria de familias de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$.
- Aritmética cardinal
  - La teoría PCF de Shelah

han tenido éxito en la resolución de problemas en áreas como la topología general, el análisis funcional abstracto, la teoría de la medida y el álgebra.

Contenido

Paul Joseph Cohen (1934-2007), medalla Fields 1966

Cohen en 1963 introduce el método de **forcing** mediante el cual prueba la independencia del axioma de elección de ZF así como la independencia de la hipótesis del continuo de ZFC. Dicha técnica ha permitido establecer que una amplia lista de enunciados en matemáticas resulten ser independientes de ZFC.

Paul Joseph Cohen (1934-2007), medalla Fields 1966

Cohen en 1963 introduce el método de **forcing** mediante el cual prueba la independencia del axioma de elección de ZF así como la independencia de la hipótesis del continuo de ZFC. Dicha técnica ha permitido establecer que una amplia lista de enunciados en matemáticas resulten ser independientes de ZFC.

Teorías y modelos

Teoría

Informalmente una **teoría** está formada por un conjunto de axiomas y teoremas. Los teoremas son proposiciones lógicamente deducibles de los axiomas. Formalmente, las teorías se conciben como un conjunto de proposiciones expresables en un cierto lenguaje formal que recoge explícitamente el conjunto de símbolos de la teoría, los axiomas y las reglas de deducción.

Modelo

Un **modelo** de una teoría es un estructura $\mathcal{M}$ donde los enunciados formales de la teoría (*i.e.*, cadenas de símbolos) son interpretables y verificables (*i.e.*, o bien la proposición o su negación se satisfacen en el modelo).

Teorías y modelos

Teoría

Informalmente una **teoría** está formada por un conjunto de axiomas y teoremas. Los teoremas son proposiciones lógicamente deducibles de los axiomas. Formalmente, las teorías se conciben como un conjunto de proposiciones expresables en un cierto lenguaje formal que recoge explícitamente el conjunto de símbolos de la teoría, los axiomas y las reglas de deducción.

Modelo

Un **modelo** de una teoría es un estructura $\mathcal{M}$ donde los enunciados formales de la teoría (*i.e.*, cadenas de símbolos) son interpretables y verificables (*i.e.*, o bien la proposición o su negación se satisfacen en el modelo).

Teorías y modelos

Teoría

Informalmente una **teoría** está formada por un conjunto de axiomas y teoremas. Los teoremas son proposiciones lógicamente deducibles de los axiomas. Formalmente, las teorías se conciben como un conjunto de proposiciones expresables en un cierto lenguaje formal que recoge explícitamente el conjunto de símbolos de la teoría, los axiomas y las reglas de deducción.

Modelo

Un **modelo** de una teoría es un estructura $\mathcal{M}$ donde los enunciados formales de la teoría (*i.e.*, cadenas de símbolos) son interpretables y verificables (*i.e.*, o bien la proposición o su negación se satisfacen en el modelo).

- Una pareja $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$, donde M es un conjunto no vacío y $E \subset M \times M$ es una relación binaria sobre M, es un ejemplo de una estructura.
- Teoría-$\leqslant$, Axiomas: reflexividad, antisimetría, transitividad, totalidad (linealidad).
- Modelos: Conjuntos linealmente ordenados.

Modelos de ZFC son estructuras $\langle M, \in \rangle$ que satisfacen los axiomas de: Existencia, Extensionalidad, Fundación, *Comprensión*, Par, Unión, *Reemplazo*, Infinito, Potencia y Elección.

Löwenheim-Skolem, 1915-1920; Mostowski, 1939.

Asumiendo la consistencia de ZFC es posible considerar modelos transitivos numerables de ZFC.

- M es transitivo sii $x \in M$ implica $x \subset M$.

- Una pareja $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$, donde M es un conjunto no vacío y $E \subset M \times M$ es una relación binaria sobre M, es un ejemplo de una estructura.
- Teoría-$\leqslant$, Axiomas: reflexividad, antisimetría, transitividad, totalidad (linealidad).
- Modelos: Conjuntos linealmente ordenados.

Modelos de ZFC son estructuras $\langle M, \in \rangle$ que satisfacen los axiomas de: Existencia, Extensionalidad, Fundación, *Comprensión*, Par, Unión, *Reemplazo*, Infinito, Potencia y Elección.

Löwenheim-Skolem, 1915-1920; Mostowski, 1939.

Asumiendo la consistencia de ZFC es posible considerar modelos transitivos numerables de ZFC.

- M es transitivo sii $x \in M$ implica $x \subset M$.

- Una pareja $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$, donde M es un conjunto no vacío y $E \subset M \times M$ es una relación binaria sobre M, es un ejemplo de una estructura.
- Teoría-$\leqslant$, Axiomas: reflexividad, antisimetría, transitividad, totalidad (linealidad).
- Modelos: Conjuntos linealmente ordenados.

Modelos de ZFC son estructuras $\langle M, \in \rangle$ que satisfacen los axiomas de: Existencia, Extensionalidad, Fundación, *Comprensión*, Par, Unión, *Reemplazo*, Infinito, Potencia y Elección.

Löwenheim-Skolem, 1915-1920; Mostowski, 1939.

Asumiendo la consistencia de ZFC es posible considerar modelos transitivos numerables de ZFC.

- M es transitivo sii $x \in M$ implica $x \subset M$.

- Una pareja $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$, donde M es un conjunto no vacío y $E \subset M \times M$ es una relación binaria sobre M, es un ejemplo de una estructura.
- Teoría-$\leqslant$, Axiomas: reflexividad, antisimetría, transitividad, totalidad (linealidad).
- Modelos: Conjuntos linealmente ordenados.

Modelos de ZFC son estructuras $\langle M, \in \rangle$ que satisfacen los axiomas de: Existencia, Extensionalidad, Fundación, *Comprensión*, Par, Unión, *Reemplazo*, Infinito, Potencia y Elección.

Löwenheim-Skolem, 1915-1920; Mostowski, 1939.

Asumiendo la consistencia de ZFC es posible considerar modelos transitivos numerables de ZFC.

- M es transitivo sii $x \in M$ implica $x \subset M$.

- Una pareja $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$, donde M es un conjunto no vacío y $E \subset M \times M$ es una relación binaria sobre M, es un ejemplo de una estructura.
- Teoría-$\leqslant$, Axiomas: reflexividad, antisimetría, transitividad, totalidad (linealidad).
- Modelos: Conjuntos linealmente ordenados.

Modelos de ZFC son estructuras $\langle M, \in \rangle$ que satisfacen los axiomas de: Existencia, Extensionalidad, Fundación, *Comprensión*, Par, Unión, *Reemplazo*, Infinito, Potencia y Elección.

Löwenheim-Skolem, 1915-1920; Mostowski, 1939.

Asumiendo la consistencia de ZFC es posible considerar modelos transitivos numerables de ZFC.

- M es transitivo sii $x \in M$ implica $x \subset M$.

- Una pareja $\mathcal{M} = \langle M, E\rangle$, donde M es un conjunto no vacío y $E \subset M \times M$ es una relación binaria sobre M, es un ejemplo de una estructura.
- Teoría-$\leqslant$, Axiomas: reflexividad, antisimetría, transitividad, totalidad (linealidad).
- Modelos: Conjuntos linealmente ordenados.

Modelos de ZFC son estructuras $\langle M, \in\rangle$ que satisfacen los axiomas de: Existencia, Extensionalidad, Fundación, *Comprensión*, Par, Unión, *Reemplazo*, Infinito, Potencia y Elección.

Löwenheim-Skolem, 1915-1920; Mostowski, 1939.

Asumiendo la consistencia de ZFC es posible considerar modelos transitivos numerables de ZFC.

- M es transitivo sii $x \in M$ implica $x \subset M$.

- Una pareja $\mathcal{M} = \langle M, E\rangle$, donde M es un conjunto no vacío y $E \subset M \times M$ es una relación binaria sobre M, es un ejemplo de una estructura.
- Teoría-$\leqslant$, Axiomas: reflexividad, antisimetría, transitividad, totalidad (linealidad).
- Modelos: Conjuntos linealmente ordenados.

Modelos de ZFC son estructuras $\langle M, \in\rangle$ que satisfacen los axiomas de: Existencia, Extensionalidad, Fundación, *Comprensión*, Par, Unión, *Reemplazo*, Infinito, Potencia y Elección.

Löwenheim-Skolem, 1915-1920; Mostowski, 1939.

Asumiendo la consistencia de ZFC es posible considerar modelos transitivos numerables de ZFC.

- M es transitivo sii $x \in M$ implica $x \subset M$.

La idea de forcing

Forcing es un "procedimiento algorítmico" que toma como entradas

- un modelo transitivo numerable M de ZFC;
- un orden parcial $\mathbb{P} \in M$.

A partir de estos datos de entrada, el método de forcing produce un nuevo modelo transitivo numerable $M^{\mathbb{P}}$ de ZFC.

La verdad en $M^{\mathbb{P}}$ depende de las propiedades combinatorias de $\mathbb{P}$ y de la verdad en M.

La idea de forcing

Forcing es un "procedimiento algorítmico" que toma como entradas

- un modelo transitivo numerable M de ZFC;
- un orden parcial $\mathbb{P} \in M$.

A partir de estos datos de entrada, el método de forcing produce un nuevo modelo transitivo numerable $M^{\mathbb{P}}$ de ZFC.

La verdad en $M^{\mathbb{P}}$ depende de las propiedades combinatorias de $\mathbb{P}$ y de la verdad en M.

La idea de forcing

Forcing es un “procedimiento algorítmico” que toma como entradas

- un modelo transitivo numerable M de ZFC;
- un orden parcial $\mathbb{P} \in M$.

A partir de estos datos de entrada, el método de forcing produce un nuevo modelo transitivo numerable $M^{\mathbb{P}}$ de ZFC.

La verdad en $M^{\mathbb{P}}$ depende de las propiedades combinatorias de $\mathbb{P}$ y de la verdad en M.

La idea de forcing

Forcing es un "procedimiento algorítmico" que toma como entradas

- un modelo transitivo numerable M de ZFC;
- un orden parcial $\mathbb{P} \in M$.

A partir de estos datos de entrada, el método de forcing produce un nuevo modelo transitivo numerable $M^{\mathbb{P}}$ de ZFC.

La verdad en $M^{\mathbb{P}}$ depende de las propiedades combinatorias de $\mathbb{P}$ y de la verdad en M.

La idea de forcing

Forcing es un "procedimiento algorítmico" que toma como entradas

- un modelo transitivo numerable M de ZFC;
- un orden parcial $\mathbb{P} \in M$.

A partir de estos datos de entrada, el método de forcing produce un nuevo modelo transitivo numerable $M^{\mathbb{P}}$ de ZFC.

La verdad en $M^{\mathbb{P}}$ depende de las propiedades combinatorias de $\mathbb{P}$ y de la verdad en M.

La idea de forcing

Forcing es un "procedimiento algorítmico" que toma como entradas

- un modelo transitivo numerable M de ZFC;
- un orden parcial $\mathbb{P} \in M$.

A partir de estos datos de entrada, el método de forcing produce un nuevo modelo transitivo numerable $M^{\mathbb{P}}$ de ZFC.

La verdad en $M^{\mathbb{P}}$ depende de las propiedades combinatorias de $\mathbb{P}$ y de la verdad en M.

Contenido

Teorema (Solovay, 1970)

Asumiendo la existencia de un cardinal débilmente inaccesible, es consistente tener:

- ZF+ *Axioma de Elección Numerable* + *Todo subconjunto de números reales es Lebesgue medible.*

SH: Hipótesis de Suslin, 1920.

Todo conjunto ordenado linealmente, denso, sin extremos, completo y ccc es separable, y por tanto isomorfo a $\mathbb{R}$.

- Jensen (1972): Asumiendo $\diamondsuit$ (una consecuencia de $V = L$) hay contraejemplo.
- Solovay-Tennenbaum (1972): Usando forcing iterado ($MA + \neg CH$) la SH es consistente con ZFC.

Teorema (Solovay, 1970)

Asumiendo la existencia de un cardinal débilmente inaccesible, es consistente tener:

- ZF+ *Axioma de Elección Numerable* + *Todo subconjunto de números reales es Lebesgue medible.*

SH: Hipótesis de Suslin, 1920.

Todo conjunto ordenado linealmente, denso, sin extremos, completo y ccc es separable, y por tanto isomorfo a $\mathbb{R}$.

- Jensen (1972): Asumiendo $\diamond$ (una consecuencia de $V = L$) hay contraejemplo.
- Solovay-Tennenbaum (1972): Usando forcing iterado ($MA + \neg CH$) la SH es consistente con ZFC.

Teorema (Solovay, 1970)

Asumiendo la existencia de un cardinal débilmente inaccesible, es consistente tener:

- ZF+ *Axioma de Elección Numerable* + *Todo subconjunto de números reales es Lebesgue medible.*

SH: Hipótesis de Suslin, 1920.

Todo conjunto ordenado linealmente, denso, sin extremos, completo y ccc es separable, y por tanto isomorfo a $\mathbb{R}$.

- Jensen (1972): Asumiendo $\diamondsuit$ (una consecuencia de $V = L$) hay contraejemplo.
- Solovay-Tennenbaum (1972): Usando forcing iterado ($MA + \neg CH$) la SH es consistente con ZFC.

Teorema (Solovay, 1970)

Asumiendo la existencia de un cardinal débilmente inaccesible, es consistente tener:

- ZF+ *Axioma de Elección Numerable* + *Todo subconjunto de números reales es Lebesgue medible.*

SH: Hipótesis de Suslin, 1920.

Todo conjunto ordenado linealmente, denso, sin extremos, completo y ccc es separable, y por tanto isomorfo a $\mathbb{R}$.

- Jensen (1972): Asumiendo $\diamond$ (una consecuencia de $V = L$) hay contraejemplo.
- Solovay-Tennenbaum (1972): Usando forcing iterado ($MA + \neg CH$) la SH es consistente con ZFC.

Teorema (Solovay, 1970)

Asumiendo la existencia de un cardinal débilmente inaccesible, es consistente tener:

- ZF+ *Axioma de Elección Numerable* + *Todo subconjunto de números reales es Lebesgue medible.*

SH: Hipótesis de Suslin, 1920.

Todo conjunto ordenado linealmente, denso, sin extremos, completo y ccc es separable, y por tanto isomorfo a $\mathbb{R}$.

- Jensen (1972): Asumiendo $\diamond$ (una consecuencia de $V = L$) hay contraejemplo.
- Solovay-Tennenbaum (1972): Usando forcing iterado ($MA + \neg CH$) la SH es consistente con ZFC.

La conjetura de Borel, 1919.

- Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tiene *medida fuerte cero* si para cada sucesión $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle \subset \mathbb{R}^+$ existe una sucesión de intervalos $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ con $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ y $X \subset \bigcup_{n \in \omega} I_n$.
- Borel conjeturó que **todo conjunto de medida fuerte cero es numerable**.
    - Sierpiński/Lusin (1928): Asumiendo CH la conjetura de Borel es **falsa**.
    - Laver (1976): Es consistente con ZFC que la conjetura de Borel sea **verdadera**.

La conjetura de Borel, 1919.

- Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tiene *medida fuerte cero* si para cada sucesión $\langle \varepsilon_n \colon n \in \omega \rangle \subset \mathbb{R}^+$ existe una sucesión de intervalos $\langle I_n \colon n \in \omega \rangle$ con $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ y $X \subset \bigcup_{n \in \omega} I_n$.
- Borel conjeturó que **todo conjunto de medida fuerte cero es numerable**.
  - Sierpiński/Lusin (1928): Asumiendo CH la conjetura de Borel es **falsa**.
  - Laver (1976): Es consistente con ZFC que la conjetura de Borel sea **verdadera**.

La conjetura de Borel, 1919.

- Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tiene *medida fuerte cero* si para cada sucesión $\langle \varepsilon_n : n \in \omega \rangle \subset \mathbb{R}^+$ existe una sucesión de intervalos $\langle I_n : n \in \omega \rangle$ con $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ y $X \subset \bigcup_{n \in \omega} I_n$.
- Borel conjeturó que **todo conjunto de medida fuerte cero es numerable**.
  - Sierpiński/Lusin (1928): Asumiendo CH la conjetura de Borel es **falsa**.
  - Laver (1976): Es consistente con ZFC que la conjetura de Borel sea **verdadera**.

La conjetura de Borel, 1919.

- Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tiene *medida fuerte cero* si para cada sucesión $\langle \varepsilon_n \colon n \in \omega \rangle \subset \mathbb{R}^+$ existe una sucesión de intervalos $\langle I_n \colon n \in \omega \rangle$ con $\operatorname{diam}(I_n) \leqslant \varepsilon_n$ para cada $n \in \omega$ y $X \subset \bigcup_{n\in\omega} I_n$.
- Borel conjeturó que **todo conjunto de medida fuerte cero es numerable**.
  - Sierpiński/Lusin (1928): Asumiendo CH la conjetura de Borel es **falsa**.
  - Laver (1976): Es consistente con ZFC que la conjetura de Borel sea **verdadera**.

La conjetura de Whitehead, 1950's.

Suponga que G es un grupo Abeliano con $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z}) = 0$. Entonces G es libre.

- Shelah (1974):

  En $V = L$ todo grupo de Whitehead es libre.

  Asumiendo $MA + \neg CH$ hay contraejemplo.

Álgebras de Banach.

En 1947 Kaplansky preguntó si todos los homomorfismos algebraicos de $C(X)$ a una álgebra de Banach B es necesariamente continua.

- En 1978, 1979 Dales y Esterelle independientemente prueban que: Asumiendo CH es posible construir un **contraejemplo**.
- Woodin (principios de los 1980's): Asumiendo $MA + \neg CH$ la respuesta es **Si**.

La conjetura de Whitehead, 1950's.

Suponga que G es un grupo Abeliano con $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z}) = 0$. Entonces G es libre.

- Shelah (1974):
  - En V = L todo grupo de Whitehead es libre.
  - Asumiendo MA + ¬CH hay contraejemplo.

Álgebras de Banach.

En 1947 Kaplansky preguntó si todos los homomorfismos algebraicos de $C(X)$ a una álgebra de Banach B es necesariamente continua.

- En 1978, 1979 Dales y Esterelle independientemente prueban que: Asumiendo CH es posible construir un **contraejemplo**.
- Woodin (principios de los 1980's): Asumiendo MA + ¬CH la respuesta es **Si**.

La conjetura de Whitehead, 1950's.

Suponga que G es un grupo Abeliano con $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z}) = 0$. Entonces G es libre.

- Shelah (1974):
  - En V = L todo grupo de Whitehead es libre.
  - Asumiendo MA + ¬CH hay contraejemplo.

Álgebras de Banach.

En 1947 Kaplansky preguntó si todos los homomorfismos algebraicos de $C(X)$ a una álgebra de Banach B es necesariamente continua.

- En 1978, 1979 Dales y Esterelle independientemente prueban que: Asumiendo CH es posible construir un **contraejemplo**.
- Woodin (principios de los 1980's): Asumiendo MA + ¬CH la respuesta es **Si**.

La conjetura de Whitehead, 1950's.

Suponga que G es un grupo Abeliano con $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z}) = 0$. Entonces G es libre.

- Shelah (1974):
  - En $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ todo grupo de Whitehead es libre.
  - Asumiendo $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}$ hay contraejemplo.

Álgebras de Banach.

En 1947 Kaplansky preguntó si todos los homomorfismos algebraicos de $C(X)$ a una álgebra de Banach B es necesariamente continua.

- En 1978, 1979 Dales y Esterelle independientemente prueban que: Asumiendo CH es posible construir un **contraejemplo**.
- Woodin (principios de los 1980's): Asumiendo $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}$ la respuesta es **Si**.

La conjetura de Whitehead, 1950's.

Suponga que G es un grupo Abeliano con $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z}) = 0$. Entonces G es libre.

- Shelah (1974):
  - En $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ todo grupo de Whitehead es libre.
  - Asumiendo $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}$ hay contraejemplo.

Álgebras de Banach.

En 1947 Kaplansky preguntó si todos los homomorfismos algebraicos de $C(X)$ a una álgebra de Banach B es necesariamente continua.

- En 1978, 1979 Dales y Esterelle independientemente prueban que: Asumiendo CH es posible construir un **contraejemplo**.
- Woodin (principios de los 1980's): Asumiendo $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}$ la respuesta es **Si**.

La conjetura de Whitehead, 1950's.

Suponga que G es un grupo Abeliano con $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z}) = 0$. Entonces G es libre.

- Shelah (1974):
  - En $\mathrm{V} = \mathrm{L}$ todo grupo de Whitehead es libre.
  - Asumiendo $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}$ hay contraejemplo.

Álgebras de Banach.

En 1947 Kaplansky preguntó si todos los homomorfismos algebraicos de $C(X)$ a una álgebra de Banach B es necesariamente continua.

- En 1978, 1979 Dales y Esterelle independientemente prueban que: Asumiendo CH es posible construir un **contraejemplo**.
- Woodin (principios de los 1980's): Asumiendo $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}$ la respuesta es **Si**.

La conjetura de Whitehead, 1950's.

Suponga que G es un grupo Abeliano con $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z}) = 0$. Entonces G es libre.

- Shelah (1974):
  - En V = L todo grupo de Whitehead es libre.
  - Asumiendo MA + ¬CH hay contraejemplo.

Álgebras de Banach.

En 1947 Kaplansky preguntó si todos los homomorfismos algebraicos de $C(X)$ a una álgebra de Banach B es necesariamente continua.

- En 1978, 1979 Dales y Esterelle independientemente prueban que: Asumiendo CH es posible construir un **contraejemplo**.
- Woodin (principios de los 1980's): Asumiendo MA + ¬CH la respuesta es **Si**.

La conjetura de Whitehead, 1950's.

Suponga que G es un grupo Abeliano con $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z}) = 0$. Entonces G es libre.

- Shelah (1974):
  - En $V = L$ todo grupo de Whitehead es libre.
  - Asumiendo $MA + \neg CH$ hay contraejemplo.

Álgebras de Banach.

En 1947 Kaplansky preguntó si todos los homomorfismos algebraicos de $C(X)$ a una álgebra de Banach B es necesariamente continua.

- En 1978, 1979 Dales y Esterelle independientemente prueban que: Asumiendo CH es posible construir un **contraejemplo**.
- Woodin (principios de los 1980's): Asumiendo $MA + \neg CH$ la respuesta es **Si**.

Álgebras de Calkin.

Brown-Douglas-Filmore (1977): ¿Es todo automorfismo del álgebra de Calkin un automorfismo interno?

- Phillips-Weaver (2007): CH implica que existe un automorfismo que no es interno.
- Farah (2010): OCA implica que todos los automorfismos son internos.

Grupos topológicos.

En 1978 Malykhin preguntó si todo grupo topológico Fréchet separable (numerable) es metrizable.

- Malykhin (1978): Bajo $\mathfrak{p} > \aleph_1$ hay contraejemplo.
- Hrušák-R. (2014): Es consistente con ZFC que todo grupo topológico Fréchet separable es metrizable.

Álgebras de Calkin.

Brown-Douglas-Filmore (1977): ¿Es todo automorfismo del álgebra de Calkin un automorfismo interno?

- Phillips-Weaver (2007): CH implica que existe un automorfismo que no es interno.
- Farah (2010): OCA implica que todos los automorfismos son internos.

Grupos topológicos.

En 1978 Malykhin preguntó si todo grupo topológico Fréchet separable (numerable) es metrizable.

- Malykhin (1978): Bajo $\mathfrak{p} > \aleph_1$ hay contraejemplo.
- Hrušák-R. (2014): Es consistente con ZFC que todo grupo topológico Fréchet separable es metrizable.

Álgebras de Calkin.

Brown-Douglas-Filmore (1977): ¿Es todo automorfismo del álgebra de Calkin un automorfismo interno?

- Phillips-Weaver (2007): CH implica que existe un automorfismo que no es interno.
- Farah (2010): OCA implica que todos los automorfismos son internos.

Grupos topológicos.

En 1978 Malykhin preguntó si todo grupo topológico Fréchet separable (numerable) es metrizable.

- Malykhin (1978): Bajo $\mathfrak{p} > \aleph_1$ hay contraejemplo.
- Hrušák-R. (2014): Es consistente con ZFC que todo grupo topológico Fréchet separable es metrizable.

Álgebras de Calkin.

Brown-Douglas-Filmore (1977): ¿Es todo automorfismo del álgebra de Calkin un automorfismo interno?

- Phillips-Weaver (2007): CH implica que existe un automorfismo que no es interno.
- Farah (2010): OCA implica que todos los automorfismos son internos.

Grupos topológicos.

En 1978 Malykhin preguntó si todo grupo topológico Fréchet separable (numerable) es metrizable.

- Malykhin (1978): Bajo $\mathfrak{p} > \aleph_1$ hay contraejemplo.
- Hrušák-R. (2014): Es consistente con ZFC que todo grupo topológico Fréchet separable es metrizable.

Álgebras de Calkin.

Brown-Douglas-Filmore (1977): ¿Es todo automorfismo del álgebra de Calkin un automorfismo interno?

- Phillips-Weaver (2007): CH implica que existe un automorfismo que no es interno.
- Farah (2010): OCA implica que todos los automorfismos son internos.

Grupos topológicos.

En 1978 Malykhin preguntó si todo grupo topológico Fréchet separable (numerable) es metrizable.

- Malykhin (1978): Bajo $\mathfrak{p} > \aleph_1$ hay contraejemplo.
- Hrušák-R. (2014): Es consistente con ZFC que todo grupo topológico Fréchet separable es metrizable.

Álgebras de Calkin.

Brown-Douglas-Filmore (1977): ¿Es todo automorfismo del álgebra de Calkin un automorfismo interno?

- Phillips-Weaver (2007): CH implica que existe un automorfismo que no es interno.
- Farah (2010): OCA implica que todos los automorfismos son internos.

Grupos topológicos.

En 1978 Malykhin preguntó si todo grupo topológico Fréchet separable (numerable) es metrizable.

- Malykhin (1978): Bajo $\mathfrak{p} > \aleph_1$ hay contraejemplo.
- Hrušák-R. (2014): Es consistente con ZFC que todo grupo topológico Fréchet separable es metrizable.

Álgebras de Calkin.

Brown-Douglas-Filmore (1977): ¿Es todo automorfismo del álgebra de Calkin un automorfismo interno?

- Phillips-Weaver (2007): CH implica que existe un automorfismo que no es interno.
- Farah (2010): OCA implica que todos los automorfismos son internos.

Grupos topológicos.

En 1978 Malykhin preguntó si todo grupo topológico Fréchet separable (numerable) es metrizable.

- Malykhin (1978): Bajo $\mathfrak{p} > \aleph_1$ hay contraejemplo.
- Hrušák-R. (2014): Es consistente con ZFC que todo grupo topológico Fréchet separable es metrizable.

Contenido

Temas de investigación

- Grupos extremadamente disconexos .
- Dinámica de semigrupos y teoría de Ramsey infinita.

Temas de investigación

- Grupos extremadamente disconexos .
- Dinámica de semigrupos y teoría de Ramsey infinita.

Grupos extremadamente disconexos

Definición (Stone, 1937)

Un espacio regular X es *extremadamente disconexo* si la cerradura de cada subconjunto abierto de X es abierto.

Problema (Arhangel'skii, 1967)

¿Existe un grupo topológico extremadamente disconexo no discreto?

Resultados parciales

Para cada una de las siguientes suposiciones, existe un ejemplo a la pregunta de Arhangel'skii.

- (Sirota, 1969/Louveau, 1972) La existencia de ultrafiltros de Ramsey sobre ω.
- (Malykhin,1975) $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Grupos extremadamente disconexos

Definición (Stone, 1937)

Un espacio regular X es *extremadamente disconexo* si la cerradura de cada subconjunto abierto de X es abierto.

Problema (Arhangel'skii, 1967)

¿Existe un grupo topológico extremadamente disconexo no discreto?

Resultados parciales

Para cada una de las siguientes suposiciones, existe un ejemplo a la pregunta de Arhangel'skii.

- (Sirota, 1969/Louveau, 1972) La existencia de ultrafiltros de Ramsey sobre ω.
- (Malykhin,1975) $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Grupos extremadamente disconexos

Definición (Stone, 1937)

Un espacio regular X es *extremadamente disconexo* si la cerradura de cada subconjunto abierto de X es abierto.

Problema (Arhangel'skii, 1967)

¿Existe un grupo topológico extremadamente disconexo no discreto?

Resultados parciales

Para cada una de las siguientes suposiciones, existe un ejemplo a la pregunta de Arhangel'skii.

- (Sirota, 1969/Louveau, 1972) La existencia de ultrafiltros de Ramsey sobre ω.
- (Malykhin,1975) $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Grupos extremadamente disconexos

Definición (Stone, 1937)

Un espacio regular X es *extremadamente disconexo* si la cerradura de cada subconjunto abierto de X es abierto.

Problema (Arhangel'skii, 1967)

¿Existe un grupo topológico extremadamente disconexo no discreto?

Resultados parciales

Para cada una de las siguientes suposiciones, existe un ejemplo a la pregunta de Arhangel'skii.

- (Sirota, 1969/Louveau, 1972) La existencia de ultrafiltros de Ramsey sobre ω.
- (Malykhin,1975) $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Grupos extremadamente disconexos

Definición (Stone, 1937)

Un espacio regular X es *extremadamente disconexo* si la cerradura de cada subconjunto abierto de X es abierto.

Problema (Arhangel'skii, 1967)

¿Existe un grupo topológico extremadamente disconexo no discreto?

Resultados parciales

Para cada una de las siguientes suposiciones, existe un ejemplo a la pregunta de Arhangel'skii.

- (Sirota, 1969/Louveau, 1972) La existencia de ultrafiltros de Ramsey sobre ω.
- (Malykhin,1975) $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

Teorema (Malykhin, 1975)

Todo grupo topológico ED debe contener un subgrupo booleano cerrado-abierto.

Teorema (R.)

Sea $\mathbb{G}$ un grupo booleano numerable ED no discreto tal que admite $E \subset \mathbb{G}$ infinito tal que

1. $span(F) \cap \overline{span}(E \setminus F) = \{0_{\mathbb{G}}\}$ *para cada* $F \subset E$ *finito;*
2. $span(E)$ *no discreto.*

Entonces existe un ultrafiltro rápido sobre ω.

Teorema (Malykhin, 1975)

Todo grupo topológico ED debe contener un subgrupo booleano cerrado-abierto.

Teorema (R.)

Sea $\mathbb{G}$ un grupo booleano numerable ED no discreto tal que admite $E \subset \mathbb{G}$ infinito tal que

1. *$span(F) \cap \overline{span}(E \setminus F) = \{0_{\mathbb{G}}\}$ para cada $F \subset E$ finito;*
2. *$span(E)$ no discreto.*

Entonces existe un ultrafiltro rápido sobre ω.

Teorema (Malykhin, 1975)

Todo grupo topológico ED debe contener un subgrupo booleano cerrado-abierto.

Teorema (R.)

Sea $\mathbb{G}$ un grupo booleano numerable ED no discreto tal que admite $E \subset \mathbb{G}$ infinito tal que

1. $span(F) \cap \overline{span}(E \setminus F) = \{0_{\mathbb{G}}\}$ *para cada* $F \subset E$ *finito;*
2. $span(E)$ *no discreto.*

Entonces existe un ultrafiltro rápido sobre ω.

Teorema (Malykhin, 1975)

Todo grupo topológico ED debe contener un subgrupo booleano cerrado-abierto.

Teorema (R.)

Sea $\mathbb{G}$ un grupo booleano numerable ED no discreto tal que admite $E \subset \mathbb{G}$ infinito tal que

1. $span(F) \cap \overline{span}(E \setminus F) = \{0_{\mathbb{G}}\}$ *para cada* $F \subset E$ *finito;*
2. *span(E) no discreto.*

Entonces existe un ultrafiltro rápido sobre ω.

Teorema (Malykhin, 1975)

Todo grupo topológico ED debe contener un subgrupo booleano cerrado-abierto.

Teorema (R.)

Sea $\mathbb{G}$ *un grupo booleano numerable ED no discreto tal que admite* $E \subset \mathbb{G}$ *infinito tal que*

1. $span(F) \cap \overline{span}(E \setminus F) = \{0_{\mathbb{G}}\}$ *para cada* $F \subset E$ *finito;*
2. *span(E) no discreto.*

Entonces existe un ultrafiltro rápido sobre ω*.*

Teorema (Malykhin, 1975)

Todo grupo topológico ED debe contener un subgrupo booleano cerrado-abierto.

Teorema (R.)

Sea $\mathbb{G}$ un grupo booleano numerable ED no discreto tal que admite $E \subset \mathbb{G}$ infinito tal que

1. $span(F) \cap \overline{span}(E \setminus F) = \{0_{\mathbb{G}}\}$ *para cada* $F \subset E$ *finito;*
2. *span(E) no discreto.*

Entonces existe un ultrafiltro rápido sobre ω.

Dinámica de semigrupos y teoría de Ramsey infinita

Teorema (Ramsey, 1930)

Si $[X]^k = \bigcup_{i<n} K_i$ con X un conjunto infinito, entonces existe una $i < n$ y un conjunto infinito $H \subseteq X$ tal que $[H]^k \subseteq K_i$.

Teorema (Hindman, 1974)

Si $\mathbb{N} = \bigcup_{i<n} K_i$, entonces existe una $i < n$ y un conjunto infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tal que todas las sumas finitas de elementos diferentes de H pertenecen a K_i.

Teorema (van der Waerden, 1927)

Si $\mathbb{N} = \bigcup_{i<n} K_i$, entonces existe una $i < n$ tal que K_i contiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes.

Estos resultados apuntan hacia el concepto de *dinámica de semigrupo*.

Dinámica de semigrupos y teoría de Ramsey infinita

Teorema (Ramsey, 1930)

Si $[X]^k = \bigcup_{i<n} K_i$ *con* X *un conjunto infinito, entonces existe una* $i < n$ *y un conjunto infinito* $H \subseteq X$ *tal que* $[H]^k \subseteq K_i$.

Teorema (Hindman, 1974)

Si $\mathbb{N} = \bigcup_{i<n} K_i$, *entonces existe una* $i < n$ *y un conjunto infinito* $H \subseteq \mathbb{N}$ *tal que todas las sumas finitas de elementos diferentes de* H *pertenecen a* K_i.

Teorema (van der Waerden, 1927)

Si $\mathbb{N} = \bigcup_{i<n} K_i$, *entonces existe una* $i < n$ *tal que* K_i *contiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes.*

Estos resultados apuntan hacia el concepto de *dinámica de semigrupo*.

Dinámica de semigrupos y teoría de Ramsey infinita

Teorema (Ramsey, 1930)

Si $[X]^k = \bigcup_{i<n} K_i$ *con* X *un conjunto infinito, entonces existe una* $i < n$ *y un conjunto infinito* $H \subseteq X$ *tal que* $[H]^k \subseteq K_i$.

Teorema (Hindman, 1974)

Si $\mathbb{N} = \bigcup_{i<n} K_i$, *entonces existe una* $i < n$ *y un conjunto infinito* $H \subseteq \mathbb{N}$ *tal que todas las sumas finitas de elementos diferentes de* H *pertenecen a* K_i.

Teorema (van der Waerden, 1927)

Si $\mathbb{N} = \bigcup_{i<n} K_i$, *entonces existe una* $i < n$ *tal que* K_i *contiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes.*

Estos resultados apuntan hacia el concepto de *dinámica de semigrupo*.

Dinámica de semigrupos y teoría de Ramsey infinita

Teorema (Ramsey, 1930)

Si $[X]^k = \bigcup_{i<n} K_i$ con X un conjunto infinito, entonces existe una $i < n$ y un conjunto infinito $H \subseteq X$ tal que $[H]^k \subseteq K_i$.

Teorema (Hindman, 1974)

Si $\mathbb{N} = \bigcup_{i<n} K_i$, entonces existe una $i < n$ y un conjunto infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tal que todas las sumas finitas de elementos diferentes de H pertenecen a K_i.

Teorema (van der Waerden, 1927)

Si $\mathbb{N} = \bigcup_{i<n} K_i$, entonces existe una $i < n$ tal que K_i contiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes.

Estos resultados apuntan hacia el concepto de *dinámica de semigrupo*.

Idea básica

- Se considera el semigrupo discreto $(\mathbb{N}, +)$ y se forma la compactación de Čech-Stone $\beta\mathbb{N}$.
- La operación $+$ se extiende a una operación de semigrupo sobre $\beta\mathbb{N}$.
- La operación extendida $p \mapsto p + q$ es continua (por la izquierda) para cada q.
- La compacidad de $\beta\mathbb{N}$ permite la construcción de objetos algebraicos que tienen fuertes consecuencias combinatorias para $\mathbb{N}$.

Lema (Ellis, 1958)

Si $(S, \star)$ es un semigrupo topológico izquierdo compacto, entonces S contiene un idempotente.

Idea básica

- Se considera el semigrupo discreto $(\mathbb{N}, +)$ y se forma la compactación de Čech-Stone $\beta\mathbb{N}$.
- La operación $+$ se extiende a una operación de semigrupo sobre $\beta\mathbb{N}$.
- La operación extendida $p \mapsto p + q$ es continua (por la izquierda) para cada q.
- La compacidad de $\beta\mathbb{N}$ permite la construcción de objetos algebraicos que tienen fuertes consecuencias combinatorias para $\mathbb{N}$.

Lema (Ellis, 1958)

Si $(S, \star)$ es un semigrupo topológico izquierdo compacto, entonces S contiene un idempotente.

Idea básica

- Se considera el semigrupo discreto $(\mathbb{N}, +)$ y se forma la compactación de Čech-Stone $\beta\mathbb{N}$.
- La operación $+$ se extiende a una operación de semigrupo sobre $\beta\mathbb{N}$.
- La operación extendida $p \mapsto p + q$ es continua (por la izquierda) para cada q.
- La compacidad de $\beta\mathbb{N}$ permite la construcción de objetos algebraicos que tienen fuertes consecuencias combinatorias para $\mathbb{N}$.

Lema (Ellis, 1958)

Si $(S, \star)$ es un semigrupo topológico izquierdo compacto, entonces S contiene un idempotente.

Idea básica

- Se considera el semigrupo discreto $(\mathbb{N}, +)$ y se forma la compactación de Čech-Stone $\beta\mathbb{N}$.
- La operación $+$ se extiende a una operación de semigrupo sobre $\beta\mathbb{N}$.
- La operación extendida $p \mapsto p + q$ es continua (por la izquierda) para cada q.
- La compacidad de $\beta\mathbb{N}$ permite la construcción de objetos algebraicos que tienen fuertes consecuencias combinatorias para $\mathbb{N}$.

Lema (Ellis, 1958)

Si $(S, \star)$ es un semigrupo topológico izquierdo compacto, entonces S contiene un idempotente.

Idea básica

- Se considera el semigrupo discreto $(\mathbb{N}, +)$ y se forma la compactación de Čech-Stone $\beta\mathbb{N}$.
- La operación $+$ se extiende a una operación de semigrupo sobre $\beta\mathbb{N}$.
- La operación extendida $p \mapsto p + q$ es continua (por la izquierda) para cada q.
- La compacidad de $\beta\mathbb{N}$ permite la construcción de objetos algebraicos que tienen fuertes consecuencias combinatorias para $\mathbb{N}$.

Lema (Ellis, 1958)

Si $(S, \star)$ es un semigrupo topológico izquierdo compacto, entonces S contiene un idempotente.

Idea básica

- Se considera el semigrupo discreto $(\mathbb{N}, +)$ y se forma la compactación de Čech-Stone $\beta\mathbb{N}$.
- La operación $+$ se extiende a una operación de semigrupo sobre $\beta\mathbb{N}$.
- La operación extendida $p \mapsto p + q$ es continua (por la izquierda) para cada q.
- La compacidad de $\beta\mathbb{N}$ permite la construcción de objetos algebraicos que tienen fuertes consecuencias combinatorias para $\mathbb{N}$.

Lema (Ellis, 1958)

Si $(S, \star)$ es un semigrupo topológico izquierdo compacto, entonces S contiene un idempotente.

Aplicaciones

- (Galvin) Teorema de Hindman y Teorema de van der Waerden.
- (Gowers, 1992) Geometría de espacios de Banach.
- (Moore, 2013) Versiones del Teorema de Hindman y del Lema de Ellis para sistemas binarios no asociativos. Esto con el propósito de abordar el famoso problema sobre la amenabilidad del grupo de Thompson F.

Aplicaciones

- (Galvin) Teorema de Hindman y Teorema de van der Waerden.
- (Gowers, 1992) Geometría de espacios de Banach.
- (Moore, 2013) Versiones del Teorema de Hindman y del Lema de Ellis para sistemas binarios no asociativos. Esto con el propósito de abordar el famoso problema sobre la amenabilidad del grupo de Thompson F.

Aplicaciones

- (Galvin) Teorema de Hindman y Teorema de van der Waerden.
- (Gowers, 1992) Geometría de espacios de Banach.
- (Moore, 2013) Versiones del Teorema de Hindman y del Lema de Ellis para sistemas binarios no asociativos. Esto con el propósito de abordar el famoso problema sobre la amenabilidad del grupo de Thompson F.

Aplicaciones

- (Galvin) Teorema de Hindman y Teorema de van der Waerden.
- (Gowers, 1992) Geometría de espacios de Banach.
- (Moore, 2013) Versiones del Teorema de Hindman y del Lema de Ellis para sistemas binarios no asociativos. Esto con el propósito de abordar el famoso problema sobre la amenabilidad del grupo de Thompson F.

Aplicaciones

- (Galvin) Teorema de Hindman y Teorema de van der Waerden.
- (Gowers, 1992) Geometría de espacios de Banach.
- (Moore, 2013) Versiones del Teorema de Hindman y del Lema de Ellis para sistemas binarios no asociativos. Esto con el propósito de abordar el famoso problema sobre la amenabilidad del grupo de Thompson F.

¡Gracias!