Sobre álgebras topológicas

Encuentro Nacional de Jóvenes investigadores en Matemáticas

Reyna María Pérez-Tiscareño

2 de Diciembre, 2015

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

1) Introducción
2) Diferentes tipos de álgebras topológicas
3) Sobre mi trabajo de investigación

1938- Se comienza el estudio de las álgebras topológicas.

Un álgebra E es un espacio vectorial sobre el campo K con una multiplicación, $\cdot : E \times E \to E$ que satisface que para toda $x, y, z \in E$ y $\lambda \in K$

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$(y+z)x = yx + zx$$

$$\lambda(xy) = x(\lambda y) = (\lambda x)y.$$

Definición

Un *álgebra topológica* *es un álgebra que es un espacio vectorial topológico y la multiplicación de anillo es separadamente continua, es decir, los operadores* $x \mapsto xy$ *para cada* y *fija en el álgebra y* $y \mapsto xy$ *para cada* x *fija en el álgebra son continuos.*

Definición

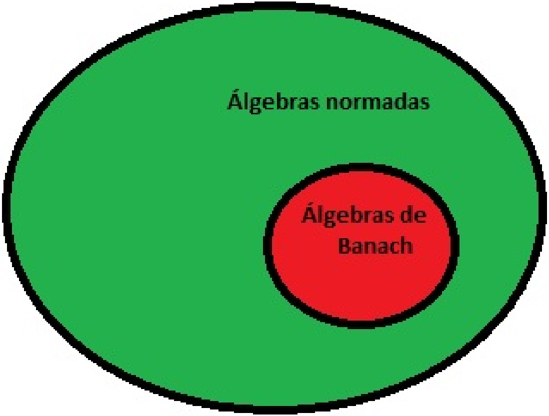
Un espacio vectorial normado E *es un espacio vectorial sobre el campo* K *(*$K = \mathbb{R}$ *o* $K = \mathbb{C}$*) con una función* $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$ *a la que se le llama norma y que satisface las siguientes propiedades:*

1) $\|x\| \geq 0$ *para toda* $x \in E$ *y* $\|x\| = 0$ *solo si* $x = 0$.
2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, *con* $\lambda \in K$.

Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado que es completo (toda sucesión de Cauchy (con respecto a la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$*) en* E *es convergente).*

Definición

Un ***álgebra de Banach*** *es un álgebra asociativa* E *sobre el campo de los números reales o complejos que es un espacio de Banach y tal que para toda* $x, y \in E$ $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.


Álgebras normadas
Álgebras de
Banach

$$(A, \| \cdot \|)$$

$$(A, \{\| \cdot \|_\alpha : \alpha \in \Lambda\})$$

$$(A, \| \cdot \|)$$

$$(A, \{\| \cdot \|_\alpha : \alpha \in \Lambda\})$$

Definición

Una seminorma en un espacio vectorial E sobre el campo K es una función $p : E \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones:

1) $p(x) \geq 0$ *para toda* $x \in E$
2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), x, y \in E$
3) $p(\lambda x) = \mid \lambda \mid p(x)$, $\lambda \in K$.

Definición

Un álgebra localmente convexa A es un álgebra topológica que es un espacio localmente convexo; en este caso su topología es dada por una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ que satisfacen que para toda $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in \Lambda$, tal que

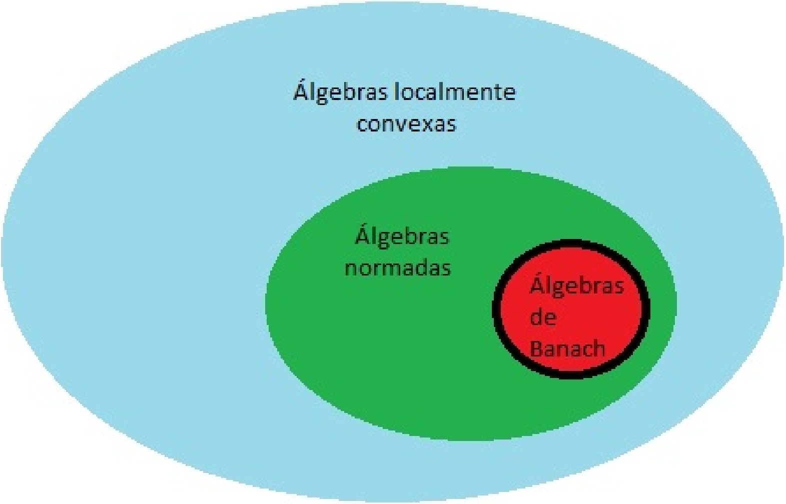
$$\|xy\|_\alpha \leqslant \|x\|_\beta \|y\|_\beta$$

para toda $x, y \in A$.

Para un álgebra localmente convexa metrizable A, existe una sucesión de seminormas $(\|\cdot\|_n)_{n=1}^{\infty}$ que definen su topología y satisfacen:

$$\|xy\|_n \leqslant \|x\|_{n+1} \|y\|_{n+1}$$

para toda $x, y \in A$.


Álgebras localmente convexas
Álgebras normadas
Álgebras de Banach

Definición

Un álgebra A multiplicativa convexa (m-convexa) es un álgebra localmente convexa cuya topología esta definida por una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ tal que

$$\|xy\|_\alpha \leqslant \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha$$

para toda $x, y \in A$ y $\alpha \in \Lambda$.

Ejemplo

Sea X un espacio topológico y denotamos por $C(X)$, el algebra de funciones continuas de X en $\mathbb{C}$ (las operaciones son definidas puntualmente). A continuación se define para todo subconjunto compacto K de X una seminorma submultiplicativa sobre $C(X)$,

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |\, f(x) \,| \quad \text{donde } f \in C(X)$$

$(C(X), \{p_K\})$ es un álgebra m-convexa.

$$(A, \|\cdot\|)$$

$$(A, \{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\})$$

$$(A, \{p_\alpha(\cdot) : \alpha \in \Lambda\})$$

$$(A, \|\cdot\|)$$

$$(A, \{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\})$$

$$(A, \{p_\alpha(\cdot) : \alpha \in \Lambda\})$$

Definición

Un álgebra localmente seudoconvexa A es un álgebra topológica que es un espacio localmente seudoconvexo; en este caso A tiene una base $\mathcal{U} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de vecindades de cero que consiste de conjuntos balanceados ($\mu U_\lambda \subset U_\lambda$ cuando $| \mu | \leqslant 1$) y conjuntos seudoconvexos ($U_\lambda + U_\lambda \subset \mu U_\lambda$ para $\mu \geqslant 2$).

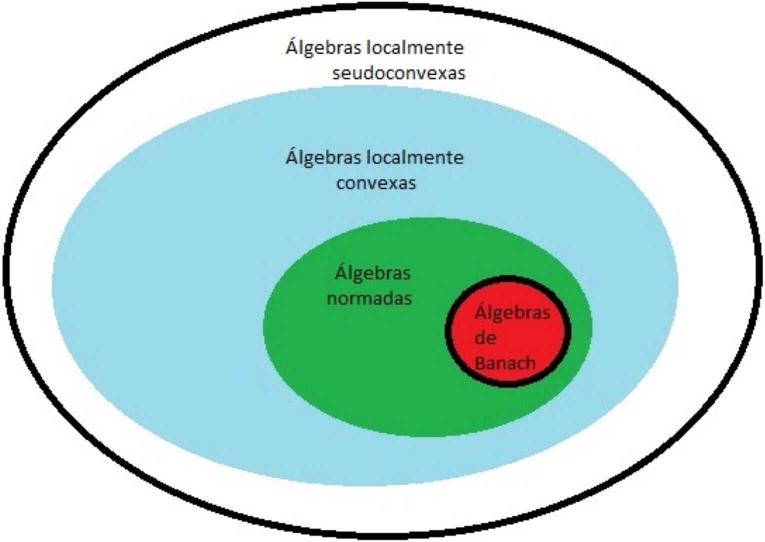
La topología de un álgebra localmente seudoconvexa es dada por una familia de k_λ seminormas homogeneas $\mathcal{P} = \{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ($p_\lambda(\mu a) = |\mu|^{k_\lambda} p_\lambda(a)$), donde $k_\lambda \in (0, 1]$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y $a \in A$.

Ejemplo

El álgebra A de funciones reales continuas, cuya familia de seminormas es dada por:

$$\| f \|_n = \sup_{-n \leq x \leq n} | (f(x))^{\frac{1}{n}} |$$

es un álgebra localmente seudoconvexa.


Álgebras localmente seudoconvexas
Álgebras localmente convexas
Álgebras normadas
Álgebras de Banach

Cuando

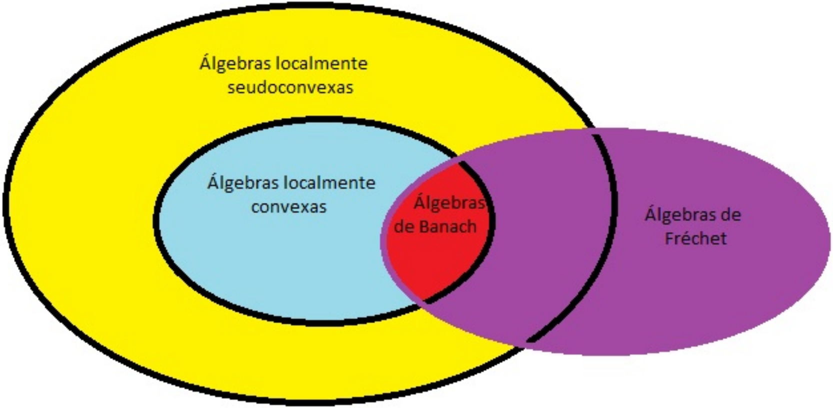
$$\inf\{k_\lambda : \lambda \in \Lambda\} = k > 0,$$

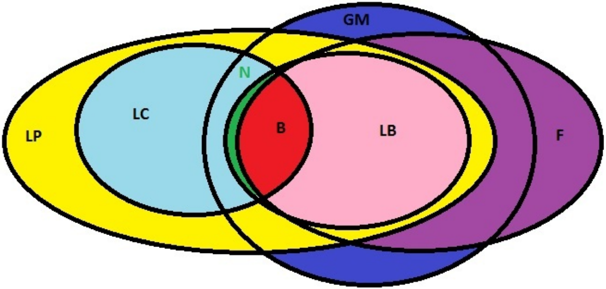
se dice que E es un *álgebra localmente k-convexa*.

Definición

Un álgebra topológica A se dice que es un álgebra topológica completa si como espacio vectorial topológico es completo.

Un álgebra de Fréchet es un álgebra topológica metrizable y completa.


Álgebras localmente seudoconvexas
Álgebras localmente convexas
Álgebras de Banach
Álgebras de Fréchet



- Álgebras normadas (N)
- Álgebras de Banach(B)
- Álgebras localmente convexas (LC)
- Álgebras localmente acotadas (LB)
- Álgebras localmente seudoconvexas (LP)
- Álgebras de Gelfand-Mazur (GM)
- Álgebras de Fréchet (F)

Límites inductivos de álgebras

Sea I un conjunto dirigido (no vacío) con el orden parcial " $\leqslant$ ". Entonces, para toda $\alpha, \beta \in I$ existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \leqslant \gamma$ y $\beta \leqslant \gamma$. Sea $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de álgebras y para toda $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \leqslant \beta$ sea

$$f_{\beta\alpha} : E_\alpha \to E_\beta$$

un homomorfismo que satisface las siguientes propiedades:
1) $f_{\alpha\alpha} = id_{E_\alpha}$ para toda $\alpha \in I$.
2) $f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha}$ para toda $\alpha, \beta, \gamma \in I$ tal que $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.
La familia $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ con los mapeos $f_{\beta\alpha}$ definidos anteriormente es llamada un *sistema inductivo de álgebras* y es denotado por $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$.

Límites inductivos de álgebras

Sea $E_0 = \sum_\alpha E_\alpha$ (una unión ajena) y sean $x, y \in E_0$ (entonces $x \in E_\alpha$ y $y \in E_\beta$) son equivalentes ($x \sim y$) si existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$ y

$$f_{\gamma\alpha}(x) = f_{\gamma\beta}(y).$$

El conjunto cociente $(E_0/\sim)$ es llamado el *límite inductivo* (o *límite directo*) del sistema inductivo $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ y será denotado por $\varinjlim E_\alpha$.

Límites inductivos de álgebras

Para toda $\alpha \in I$ sea $i_\alpha : E_\alpha \to E_0$ la inclusión y $\pi : E_0 \to E_0/\sim$ el mapeo cociente. Entonces,

$$f_\alpha = \pi \circ i_\alpha : E_\alpha \to E = \varinjlim E_\alpha \text{ para toda } \alpha \in I$$

Se prueba que

$$E = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(E_\alpha).$$

Además, $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha$ cuando $\alpha \leqslant \beta$ y $f_\alpha(E_\alpha) \subseteq f_\beta(E_\beta)$ para toda $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \leqslant \beta$.

Límites inductivos de álgebras

Las operaciones algebraicas en $\varinjlim E_\alpha$ son definidas como sigue: para toda $x, y \in E$ (entonces $x \in f_\alpha(E_\alpha)$ y $y \in f_\beta(E_\beta)$ para alguna $\alpha, \beta \in I$) existe $\gamma \in I$ tal que $x = f_\gamma(x_\gamma)$ y $y = f_\gamma(y_\gamma)$ para alguna $x_\gamma, y_\gamma \in E_\gamma$.

$x+y = f_\gamma(x_\gamma + y_\gamma), \lambda x = f_\gamma(\lambda x_\gamma)$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $xy = f_\gamma(x_\gamma y_\gamma)$.

Con respecto a estas operaciones algebraicas el límite inductivo $\varinjlim E_\alpha$ es un álgebra.

Límites inductivos de álgebras topológicas

Si se consideran límites inductivos de álgebras topológicas (E_α, τ_α), se asume que los homomorfismos $f_{\beta\alpha} : E_\alpha \to E_\beta$ $(\alpha, \beta \in I, \alpha \leqslant \beta)$ son continuos y se le da al límite inductivo $E = \varinjlim E_\alpha$ la topología final $\tau_{\varinjlim E_\alpha}$ inducida por los homomorfismos f_α.

Límites inductivos de álgebras localmente seudoconvexas E_α

Como la topología $\tau_{\varinjlim E_\alpha}$ sobre E no necesariamente es localmente seudoconvexa, se define sobre E la topología final localmente seudoconvexa como la topología τ dada por una base de vecindades de $x \in E$

$$\mathcal{L}_x = \{x + U : U \text{ es absolutamente seudoconvexo en } E \text{ y}$$

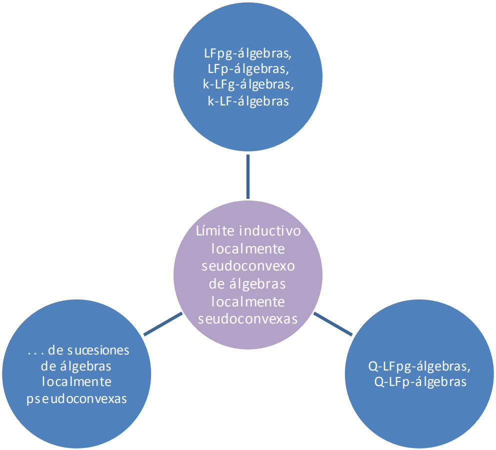
$$f_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{N}_{\tau_\alpha}\}$$

donde, $\mathcal{N}_{\tau_\alpha}$ denota el conjunto de vecindades de cero en E_α. (E, τ) es un álgebra localmente seudoconvexa. Además τ es la topología localmente seudoconvexa más fina sobre E tal que f_α es continua para toda $\alpha \in I$.

$$\Gamma_k(U) =$$

$$= \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu u_\nu : n \in \mathbb{N}, u_1, \cdots, u_n \in U \text{ y } \mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{K} \text{ con } \sum_{\nu=1}^{n} | \mu_\nu |^k \leqslant 1$$

para todo subconjunto U de E y $k \in (0, 1]$.
Al conjunto $\Gamma_k(U)$ se le llama la *cerradura absolutamente k-convexa* de U en E.
Un subconjunto $U \subset E$ es llamado *absolutamente seudoconvexo* si $U = \Gamma_k(U)$ para alguna $k \in (0, 1]$.


LFpg-álgebras,
LFp-álgebras,
k-LFg-álgebras,
k-LF-álgebras
Límite inductivo localmente seudoconvexo de álgebras localmente seudoconvexas
. . . de sucesiones de álgebras localmente pseudoconvexas
Q-LFpg-álgebras,
Q-LFp-álgebras

Cuando el límite inductivo $E = \varinjlim E_\alpha$ satisface
1. $E = \bigcup E_\alpha$ y
2. Para toda $\alpha, \beta \in I$ existe $\gamma \in I$ tal que $E_\alpha \subseteq E_\gamma$ y $E_\beta \subseteq E_\gamma$.
Usaremos la notación $\varinjlim E_\alpha$ en lugar de $\underset{\longrightarrow}{\bigcup} E_\alpha$.

Definición

Una $\mathcal{LF}$*-álgebra* ($\mathcal{LF}g$*-álgebra*) *es un álgebra topológica* (E,τ) *tal que* [a]

$$E = \bigcup_{\longrightarrow} (E_\alpha, \tau_\alpha)$$

y toda (E_α, τ_α) *es una* F*-álgebra .*
Además, una álgebra topológica (E,τ) *es un* $\mathcal{LF}$*-álgebra si* E *es un límite inductivo de una sucesión creciente de* F*-álgebras* (E_n, τ_n) *tal que*

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n,$$

τ *coincide con la topología de límite inductivo mas fina sobre* E *que hace continuos a los mapeos canónicos y la topología de* E_{n+1} *restringida a* E_n *coincide con* τ_n *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

---

[a] La topología τ en E coincide con la topología de límite inductivo más fina definida por los mapeos canónicos f_α de E_α a E para toda $\alpha \in I$.

Proposición

Sea (E, τ) *un álgebra localmente seudoconvexa para la cual* E *es un límite inductivo de* F*-álgebras localmente seudoconvexas* (E_α, τ_α). *Entonces,* (E, τ) *es un* $\mathcal{L}\mathfrak{F}pg$*-álgebra.*

Propiedades de las $\mathcal{LF}pg$-álgebras y $\mathcal{LF}p$-álgebras

1) Sea (E, τ) un $\mathcal{LF}pg$-álgebra y J un ideal bilateral cerrado en E. Entonces, el álgebra cociente E/J con la topología cociente $\overline{\tau}$ es un $\mathcal{LF}pg$-álgebra.
2) Sean (E_α, τ_α) y (E_β, τ_β) k-$\mathcal{LF}$-álgebras (completas) para alguna $k \in (0, 1]$, entonces $(E_\alpha \times E_\beta, \tau)$ donde τ denota la topología producto es una k-$\mathcal{LF}$-álgebra (completa)
3) Para toda k-$\mathcal{LF}$-álgebra completa (E, τ), $k \in (0, 1]$, la unitarización $E \times \mathbb{K}$ de E en la topología producto es un k-$\mathcal{LF}$-álgebra completa.

Si A es un álgebra de Banach con unidad, entonces el conjunto de elementos invertibles de A es abierto.

Un álgebra topológica con unidad, A se dice que es Q-álgebra si el conjunto de elementos invertibles de A es abierto.

Si A es un álgebra de Banach con unidad, entonces el conjunto de elementos invertibles de A es abierto.

Un álgebra topológica con unidad, A se dice que es Q-álgebra si el conjunto de elementos invertibles de A es abierto.

Límite inductivo de Q-álgebras

Definición

Un álgebra topológica (E, τ) *es una Q-álgebra si el conjunto Qinv$E$ de elementos casi-invertibles* [a] *(cuando E es un álgebra unitaria, entonces el conjunto Inv$E$ de elementos invertibles) de E es abierto en la topología τ.*

[a] Un elemento a de un álgebra A es *casi-invertible* , si existe un elemento $b \in A$ tal que $a + b = ab$.

Definición

Sea E un álgebra sobre $\mathbb{C}$ y $a \in E$. El espectro de a, $sp_E(a)$, es definido por

$$sp_E(a) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{a}{\lambda} \notin \mathrm{QinvA} \right\} \cup \{0\}$$

y el radio espectral de a, $\rho_E(a)$, por

$$\rho_E(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in sp_E(a)\}.$$

Límite inductivo localmente seudoconvexo de Q-álgebras localmente seudoconvexas

Sea (E,τ) un álgebra localmente seudoconvexa sobre $\mathbb{C}$ tal que $E = \underset{\longrightarrow}{\bigcup} E_\alpha$, (E_α, τ_α) son Q-álgebras localmente seudoconvexas y τ es la topología de límite inductivo localmente seudoconvexa. Si alguno de los siguientes propiedades se cumplen:

(1) Qinv$E_\alpha \in \tau$ para cada $\alpha \in I$;

(2) El radio espectral de E_α, ρ_{E_α}, es una seminorma sobre E_α para cada $\alpha \in I$;

(3) I tiene un elemento mínimo α_0 y $f_{\beta\alpha_0}$ es un mapeo abierto para cada $\beta \in I$,

entonces (E,τ) es Q-álgebra.

Se tiene que el límite inductivo localmente convexo de una familia numerable de álgebras normadas es un álgebra localmente m-convexa.

Se prueba un resultado análogo en el caso de límite inductivo k-convexo de álgebras k_n-normadas.

¡Gracias!