Teoría de Punto Fijo y la Geometría de Espacios de Banach

Carlos Alberto Hernández Linares

Universidad Veracruzana

ENJIM
30 de Noviembre - 4 de Diciembre, 2015

Punto Fijo

$$T : M \to M$$

Punto Fijo

$$T : M \to M$$

¿La ecuación

$$Tx = x \tag{1}$$

tiene alguna solución?

Punto Fijo

$$T : M \to M$$

¿La ecuación

$$Tx = x \tag{1}$$

tiene alguna solución?

Definición

Un punto fijo de $T : M \to M$ es un punto $x \in M$ que es solución de la ecuación (1)

Hipotesis Comunes sobre M y T

- M es un espacio topológico

Hipotesis Comunes sobre M y T

- M es un espacio topológico
- M es un espacio métrico completo

Hipotesis Comunes sobre M y T

- M es un espacio topológico
- M es un espacio métrico completo
- M es compacto (en cierta topología)

Hipotesis Comunes sobre M y T

- M es un espacio topológico
- M es un espacio métrico completo
- M es compacto (en cierta topología)
- M es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach

Hipotesis Comunes sobre M y T

- M es un espacio topológico
- M es un espacio métrico completo
- M es compacto (en cierta topología)
- M es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach
- T es continuo

Hipotesis Comunes sobre M y T

- M es un espacio topológico
- M es un espacio métrico completo
- M es compacto (en cierta topología)
- M es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach
- T es continuo
- T es una contracción

Hipotesis Comunes sobre M y T

- M es un espacio topológico
- M es un espacio métrico completo
- M es compacto (en cierta topología)
- M es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach
- T es continuo
- T es una contracción
- T es no expansivo

Vertientes y teoremas

Principales Áreas:

- Teoría de punto fijo topológico.

Teoremas representativos:

- Teorema de Punto Fijo de Brouwer

Vertientes y teoremas

Principales Áreas:

- Teoría de punto fijo topológico.
- Teoría métrica de punto fijo.

Teoremas representativos:

- Teorema de Punto Fijo de Brouwer
- Teorema de Punto Fijo de Banach

Vertientes y teoremas

Principales Áreas:

- Teoría de punto fijo topológico.
- Teoría métrica de punto fijo.
- Teoría discreta de punto fijo.

Teoremas representativos:

- Teorema de Punto Fijo de Brouwer
- Teorema de Punto Fijo de Banach
- Teorema de Punto Fijo de Tarski

Teoremas Clásicos

Teorema (Brouwer, 1910)

Sea $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ *y* $T : B^n \to B^n$ *y una función continua. Entonces existe* $x \in B^n$ *tal que* $Tx = x$.

Teoremas Clásicos

Teorema (Brouwer, 1910)

Sea $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ *y* $T : B^n \to B^n$ *y una función continua. Entonces existe* $x \in B^n$ *tal que* $Tx = x$.

1886 - Poincare - ideas para la demostración.

Teoremas Clásicos

Teorema (Brouwer, 1910)

Sea $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ *y* $T : B^n \to B^n$ *y una función continua. Entonces existe* $x \in B^n$ *tal que* $Tx = x$.

1886 - Poincare - ideas para la demostración.

1909 - Brouwer - prueba prueba para $n = 3$.

Teoremas Clásicos

Teorema (Brouwer, 1910)

Sea $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ *y* $T : B^n \to B^n$ *y una función continua. Entonces existe* $x \in B^n$ *tal que* $Tx = x$.

1886 - Poincare - ideas para la demostración.
1909 - Brouwer - prueba prueba para $n = 3$.
1910 - Hadamard - primera demostración para n arbitrario.

Teoremas Clásicos

Teorema (Brouwer, 1910)

Sea $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ *y* $T : B^n \to B^n$ *y una función continua. Entonces existe* $x \in B^n$ *tal que* $Tx = x$.

1886 - Poincare - ideas para la demostración.
1909 - Brouwer - prueba prueba para $n = 3$.
1910 - Hadamard - primera demostración para n arbitrario.
1912 - Brouwer - demostración distinta a la de Hadamard.

Teoremas Clásicos

Teorema (Principio de Contracción de Banach, 1922)

Sea (M, d) *un espacio métrico completo y* $T : M \to M$ *una contracción, i.e. existe* $K \in [0, 1)$ *tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq Kd(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Entonces existe $x \in M$ *tal que* $Tx = x$. *(La ec. (1) tiene solución)*

Propiedad del Punto Fijo

Sea M un subconjunto de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ y $T : M \to M$. Si dice que T es no expansivo si

Propiedad del Punto Fijo

Sea M un subconjunto de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ y $T : M \to M$. Si dice que T es no expansivo si

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in M.$$

Propiedad del Punto Fijo

Sea M un subconjunto de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ y $T : M \to M$. Si dice que T es no expansivo si

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in M.$$

Las traslaciones no triviales no tienen puntos fijos.

Propiedad del Punto Fijo

Sea M un subconjunto de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ y $T : M \to M$. Si dice que T es no expansivo si

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in M.$$

Las traslaciones no triviales no tienen puntos fijos.

Si X es un espacio de Banach, y C es un subconjunto convexo cerrado y acotado de X. ¿Cuándo ocurre que cualquier operador no expansivo $T : C \to C$ tiene un punto fijo?

Propiedad del Punto Fijo

Definición

Un espacio de Banach tiene la Propiedad del Punto Fijo (FPP). Si cada operador no expansivo $T : C \to C$ *donde* C *es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de* X *tiene al menos un punto fijo.*

Propiedad del Punto Fijo

Definición

Un espacio de Banach tiene la Propiedad del Punto Fijo (FPP). Si cada operador no expansivo $T : C \to C$ donde C es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X tiene al menos un punto fijo.

Problemas relacionados:

Propiedad del Punto Fijo

Definición

Un espacio de Banach tiene la Propiedad del Punto Fijo (FPP). Si cada operador no expansivo $T : C \to C$ *donde* C *es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de* X *tiene al menos un punto fijo.*

Problemas relacionados:

- ¿Cuál es la estructura del conjunto de puntos fijos?

Propiedad del Punto Fijo

Definición

Un espacio de Banach tiene la Propiedad del Punto Fijo (FPP). Si cada operador no expansivo $T : C \to C$ *donde* C *es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de* X *tiene al menos un punto fijo.*

Problemas relacionados:

- ¿Cuál es la estructura del conjunto de puntos fijos?
- Encontrar aproximaciones de puntos fijos.

Propiedad del Punto Fijo

Cuando C es convexo, cerrado y acotado siempre existen sucesiones $\{x_n\}$ en C tal que

$$\lim_{n} \| Tx_n - x_n \| = 0$$

tales sucesiones se conocen como sucesiones de puntos casi fijos.

Propiedad del Punto Fijo

Cuando C es convexo, cerrado y acotado siempre existen sucesiones $\{x_n\}$ en C tal que

$$\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$$

tales sucesiones se conocen como sucesiones de puntos casi fijos.

$$\inf_{x \in M} \|Tx - x\| = 0.$$

Teoremas Clásicos

Teorema (Browder, 1965)

Sea C un subconjunto cerrado y acotado de un espacio de Hilbert H. Entonces cualquier operadores no expansivo $T : C \to C$ tiene un punto fijo.

Teorema (Browder-Gohde,1965)

Sea C un subconjunto cerrado y acotado de un espacio de Banach uniformemente convexo. Entonces cualquier operadores no expansivo $T : C \to C$ tiene un punto fijo. Más aún el conjunto de puntos fijos de T es un subconjunto cerrado y convexo de C.

Teoremas Clásicos

Definición

Un espacio de Banach X es uniformemente convexo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in B_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \to \|x + y\| \leq 2(1 - \delta)$$

Teoremas Clásicos

Definición

Un espacio de Banach X es uniformemente convexo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in B_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \rightarrow \|x + y\| \leq 2(1 - \delta)$$

Ejemplos de estos espacios son:

- Los espacios de Hilbert.

Teoremas Clásicos

Definición

Un espacio de Banach X es uniformemente convexo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in B_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \rightarrow \|x + y\| \leq 2(1 - \delta)$$

Ejemplos de estos espacios son:

- Los espacios de Hilbert.
- $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ con $1 < p < +\infty$

Teoremas Clásicos

Definición

Un espacio de Banach X es uniformemente convexo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in B_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \to \|x + y\| \leq 2(1 - \delta)$$

Ejemplos de estos espacios son:

- Los espacios de Hilbert.
- $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ con $1 < p < +\infty$
- $(L_p, \|\cdot\|_p)$ con $1 < p < +\infty$

Teoremas Clásicos

Modulo de convexidad: $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$

$$\delta_X(\varepsilon) := \text{ínf}\left\{1 - \left\{\frac{x+y}{2} : x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \varepsilon\right| \|\right\}.$$

Teoremas Clásicos

Modulo de convexidad: $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$

$$\delta_X(\varepsilon) := \text{ínf}\left\{1 - \left\{\frac{x+y}{2} : x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \varepsilon\right| \|\right\}.$$

Característica de convexidad:

$$\varepsilon_0(X) := \sup\{\varepsilon \in [0,2] : \delta_X(\varepsilon) = 0\}.$$

Teoremas Clásicos

Modulo de convexidad: $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$

$$\delta_X(\varepsilon) := \text{ínf} \left\{ 1 - \left\{ \frac{x+y}{2} : x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \varepsilon \right| \| \right\}.$$

Característica de convexidad:

$$\varepsilon_0(X) := \sup\{\varepsilon \in [0,2] : \delta_X(\varepsilon) = 0\}.$$

X es uniformemente convexo si y solo si $\varepsilon_0(X) = 0$

Teoremas Clásicos

Teorema (E. Mazcuñán, 2003)

$\varepsilon_0(X) < 2 \Rightarrow X$ *tiene la FPP.*

Teoremas Clásicos

Teorema (Kirk, 1965)

Sea C un subconjunto convexo y débil-compacto de un espacio de Banach X. Suponga que C tiene estructural normal, entonces cualquier operador no expansivo $T : C \to C$ tiene un punto fijo.

Definición

Un subconjunto convexo y acotado C de un espacio de Banach X tiene estructura normal si cualquier subconjunto convexo K de C con más de un punto, contiene un punto no diametral, es decir, existe $x_0 \in K$ tal que

$$\sup_{x \in K} \|x - x_0\| < \textit{diám}(K).$$

Teoremas Clásicos

Definición

Un espacio de Banach tiene estructura normal si cada subconjunto convexo y acotado de X tiene estructura normal.

Teoremas Clásicos

Definición

Un espacio de Banach tiene estructura normal si cada subconjunto convexo y acotado de X tiene estructura normal.

Ejemplos:

- Espacios finito dimensionales.
- Espacios Uniformemente Convexos
- Sea $X_n = \ell_2^n$, tómese

$$X = \{(x_n) : x_n \in X_n \text{ satisfaciendo } \sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\|_2^2 < +\infty\}$$

dotado de la norma

$$\|(x_n)\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_n\|_2^2}$$

Teoremas Clásicos

Un espacio sin estructura normal.

Teoremas Clásicos

Un espacio sin estructura normal.

Considere ℓ_2 con la norma

$$\|(x_n)\|_{\sqrt{2}} := \text{máx}\{\|(x_n)\|_2, \sqrt{2}\|(x_n)\|_\infty\}.$$

Llamaremos a este espacio $X_{\sqrt{2}}$.

Teoremas Clásicos

Un espacio sin estructura normal.

Considere ℓ_2 con la norma

$$\|(x_n)\|_{\sqrt{2}} := \max\{\|(x_n)\|_2, \sqrt{2}\|(x_n)\|_\infty\}.$$

Llamaremos a este espacio $X_{\sqrt{2}}$.

- Karlovitz (1976) - $X_{\sqrt{2}}$ tiene la FPP.

Teoremas Clásicos

Un espacio sin estructura normal.

Considere ℓ_2 con la norma

$$\|(x_n)\|_{\sqrt{2}} := \max\{\|(x_n)\|_2, \sqrt{2}\|(x_n)\|_\infty\}.$$

Llamaremos a este espacio $X_{\sqrt{2}}$.

- Karlovitz (1976) - $X_{\sqrt{2}}$ tiene la FPP.
- Baillon y Schoneberg (1981) - X_β tiene la FPP para $\beta \in (0, 2)$

Teoremas Clásicos

Un espacio sin estructura normal.

Considere ℓ_2 con la norma

$$\|(x_n)\|_{\sqrt{2}} := \text{máx}\{\|(x_n)\|_2, \sqrt{2}\|(x_n)\|_\infty\}.$$

Llamaremos a este espacio $X_{\sqrt{2}}$.

- Karlovitz (1976) - $X_{\sqrt{2}}$ tiene la FPP.
- Baillon y Schoneberg (1981) - X_β tiene la FPP para $\beta \in (0, 2)$
- Lin (1985) - X_β tiene la FPP para $\beta > 0$.

Teoremas Clásicos

Definición

Un espacio de Banach X safisface la condición de Opial si siempre que $\{x_n\}$ converge débilmente a x_0 entonces

$$\liminf_n \|x_n - x_0\| < \liminf_n \|x_n - x\|, \quad \forall x \in X \setminus \{x_0\}.$$

Teoremas Clásicos

Definición

Un espacio de Banach X safisface la condición de Opial si siempre que $\{x_n\}$ converge débilmente a x_0 entonces

$$\liminf_n \|x_n - x_0\| < \liminf_n \|x_n - x\|, \quad \forall x \in X \setminus \{x_0\}.$$

Teorema

Si X es un espacio de Banach reflexivo con la condición de Opial, entonces X tiene estructura normal.

Teoremas Clásicos

Dado $x \in C$ definimos

$$r_x(C) = \sup\{\|x - y\| : y \in C\}$$

y

$$r(C) = \inf\{r_x(C) : x \in C\}$$

Teoremas Clásicos

Dado $x \in C$ definimos

$$r_x(C) = \sup\{\|x - y\| : y \in C\}$$

y

$$r(C) = \inf\{r_x(C) : x \in C\}$$

Coeficiente de estructura normal:

$$N(X) = \inf\left\{\frac{\text{diám}(C)}{r(C)}\right\}$$

Teoremas Clásicos

Dado $x \in C$ definimos

$$r_x(C) = \sup\{\|x - y\| : y \in C\}$$

y

$$r(C) = \text{ínf}\{r_x(C) : x \in C\}$$

Coeficiente de estructura normal:

$$N(X) = \text{ínf}\left\{\frac{\text{diám}(C)}{r(C)}\right\}$$

$$N(X) \geq \frac{1}{1 - \delta_X(1)}$$

Ejemplos sin FPP

Sea $X = c_0$ el espacio de las sucesiones reales (o complejas) que convergen a 0, con su norma usual,

$$\|(x_n)\| := sup_n |x_n|.$$

Considere $M = \{x : \|x\| \leq 1\}$ y $T : M \to M$ dada por

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (1, x_1, x_2, \ldots).$$

Ejemplos sin FPP

Alspach - 1981

$$C := \left\{ f \in L_1[0,1] : 0 \leq f \leq 1, \int_0^1 f dx = \frac{1}{2} \right\}$$

y

$$Tf(t) := \begin{cases} (2f(2t)) \wedge 1 & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ (2f(2t-1)-1) \vee 0 & \text{para } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

C es débil compacto y $T : C \to C$ no tiene puntos fijos.

Ejemplos sin FPP

Alspach - 1981

$$C := \left\{ f \in L_1[0,1] : 0 \leq f \leq 1, \int_0^1 f dx = \frac{1}{2} \right\}$$

y

$$Tf(t) := \begin{cases} (2f(2t)) \wedge 1 & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ (2f(2t-1)-1) \vee 0 & \text{para } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

C es débil compacto y $T : C \to C$ no tiene puntos fijos.

Teorema (Maurey,1981)

Todo subespacio reflexivo de $L_1[0,1]$ tiene la FPP.

Punto Fijo y Reflexividad

$$\left.\begin{array}{l}\text{Uniformemente suave}(\Rightarrow \textit{Reflexividad})\\ \text{Uniformemente Convexo}(\Rightarrow \textit{Reflexividad})\\ \text{Estructura Normal} + \text{Reflexividad}\\ \text{Uniformemente Kadec Klee} + \text{Reflexividad}\\ \text{Condición de Opial} + \text{Reflexividad}\\ \vdots\\ \text{etc} + \text{Reflexividad}\end{array}\right\} \Rightarrow \textit{FPP}$$

$$\text{FPP} \Leftrightarrow \text{Reflexividad?}$$

Espacios no reflexivos

P. N. Dowling, C. J. Lennard y B. Turett - 1997.

Considere ℓ_1 con la norma

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\| = \sup_k \gamma_k \left\|\sum_{n=k}^{\infty} a_n e_n\right\|_1 ,$$

donde $\{e_n\}_n$ es la base canónica de ℓ_1, (γ_k) es una sucesión no decreciente $(0,1)$ y $\lim_k \gamma_k = 1$.

Espacios no reflexivos

P. N. Dowling, C. J. Lennard y B. Turett - 1997.

Considere ℓ_1 con la norma

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\| = \sup_k \gamma_k \left\| \sum_{n=k}^{\infty} a_n e_n \right\|_1,$$

donde $\{e_n\}_n$ es la base canónica de ℓ_1, (γ_k) es una sucesión no decreciente $(0,1)$ y $\lim_k \gamma_k = 1$.

Espacios no reflexivos

Teorema (P.K. Lin, 2008)

Si $\gamma_k = \frac{8^k}{1+8^k}$*, el espacio de Banach* $(\ell_1, \|\cdot\|)$ *tiene la FPP.*

Espacios no reflexivos

Teorema (P.K. Lin, 2008)

Si $\gamma_k = \frac{8^k}{1+8^k}$*, el espacio de Banach* $(\ell_1, \|\cdot\|)$ *tiene la FPP.*

Teorema

El renormamiento dado por Dowling, Lennard y Turett siempre tiene la FPP.

Problemas Abiertos

Problemas Abiertos

- ¿Todo espacio reflexivo tiene la FPP?

Problemas Abiertos

Problemas Abiertos

- ¿Todo espacio reflexivo tiene la FPP?
- ¿Todo renormamiento de un espacio de Hilbert tiene la FPP?

Problemas Abiertos

Problemas Abiertos

- ¿Todo espacio reflexivo tiene la FPP?
- ¿Todo renormamiento de un espacio de Hilbert tiene la FPP?
- ¿Se puede renormar c_0 para que tenga la FPP?

Problemas Abiertos

Problemas Abiertos

- ¿Todo espacio reflexivo tiene la FPP?
- ¿Todo renormamiento de un espacio de Hilbert tiene la FPP?
- ¿Se puede renormar c_0 para que tenga la FPP?
- ¿Puede $L_1[0,1]$ renormarse para tener la FPP?

Problemas Abiertos

Problemas Abiertos

- ¿Todo espacio reflexivo tiene la FPP?
- ¿Todo renormamiento de un espacio de Hilbert tiene la FPP?
- ¿Se puede renormar c_0 para que tenga la FPP?
- ¿Puede $L_1[0,1]$ renormarse para tener la FPP?
- ¿Todo cociente de ℓ_1 puede renormarse para tener la FPP? Si esto fuera cierto, todo espacio de Banach separable podría renormarse para tener la FPP.

Problemas Abiertos

Problemas Abiertos

- ¿Todo espacio reflexivo tiene la FPP?
- ¿Todo renormamiento de un espacio de Hilbert tiene la FPP?
- ¿Se puede renormar c_0 para que tenga la FPP?
- ¿Puede $L_1[0,1]$ renormarse para tener la FPP?
- ¿Todo cociente de ℓ_1 puede renormarse para tener la FPP? Si esto fuera cierto, todo espacio de Banach separable podría renormarse para tener la FPP.
- ¿Si X es estrictamente convexo entonces tiene la FPP?

Problemas Abiertos

Problemas Abiertos

- ¿Todo espacio reflexivo tiene la FPP?
- ¿Todo renormamiento de un espacio de Hilbert tiene la FPP?
- ¿Se puede renormar c_0 para que tenga la FPP?
- ¿Puede $L_1[0,1]$ renormarse para tener la FPP?
- ¿Todo cociente de ℓ_1 puede renormarse para tener la FPP? Si esto fuera cierto, todo espacio de Banach separable podría renormarse para tener la FPP.
- ¿Si X es estrictamente convexo entonces tiene la FPP?
- ¿El análogo del Teorema de Maurey es cierto en espacios L_1 no conmutativos?

L_1 no conmutativo

Dados $h_1, h_2 \in H$ se definen seminormas sobre $B(H)$

$$\rho_{h_1,h_2}(x) = |\langle xh_1, h_2\rangle| \text{ para todo } x \in B(H)$$

La topología *débil de operadores* es la topología generada por esta familia de operadores $\{\rho_{h_1,h_2} : h_1,\ h_2 \in H\}$.

Definición

Un álgebra de von Neumann algebra es una subalgebra M de $B(H)$ que es autoadjunta, contiene a $\mathbf{1}$ *y es cerrada en la topología débil de operadores.*

L_1 no conmutativo

Un operador autoadjunto $x \in B(H)$ es positivo si

$$\langle xh, h\rangle \geq 0 \text{ para todo } h \in H.$$

Sea M_+ el cono de todos los elementos positivos M. Para $x,\ y \in M$ diremos que $x \leq y$ if and only if $x - y \in M_+$.

Una traza en M es una función $\tau : M_+ \to [0, \infty]$ que satisface:

1. $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$, $x, y \in M_+$.
2. $\tau(\lambda x) = \lambda\tau(x)$; $x \in M_+$, $\lambda \in [0, +\infty]$.
3. $\tau(xx^*) = \tau(x^*x)$

L_1 no conmutativo

Definición

Una traza τ es:

- *Normal: Si* $x_\alpha \uparrow x$ *en* $M_+ \Rightarrow \tau(x_\alpha) \uparrow \tau(x)$.
- *Fiel: Si* $\tau(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, *para todo* $x \in M_+$.
- *Semifinita: Si dado* $x \in M_+ \setminus \{\mathbf{0}\} \Rightarrow$ *existe* $y \in M_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ *tal que* $y \leq x$ *y* $\tau(y) < +\infty$.
- *Finita: Si* $\tau(\mathbf{1}) < +\infty$.

L_1 no conmutativo

Sea M un álgebra de von Neumann sobre H y τ una traza normal, fiel y finita sobre M.

Considere $1 \leq p < \infty$. Para $x \in M$ defina la función

$$\|x\|_p = \tau(|x|^p)^{\frac{1}{p}},$$

que es una norma sobre M. La completación de M con esta norma es denotada por $L_p(\tau)$. Estos espacios de Banach son los conocido como espacio L_p no conmutativos.