Funciones Zeta Locales

EDWIN LEÓN CARDENAL

1º de Diciembre, ENJIM15

Definición

Dado $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, consideramos
$N_k := \#\{$ soluciones de $f(x) \equiv 0 \mod p^k\}$ para $k \geq 1$ con $N_0 = 1$.

Definición

Dado $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, consideramos
$N_k := \#\{$ soluciones de $f(x) \equiv 0 \mod p^k\}$ para $k \geq 1$ con $N_0 = 1$.

Ejemplo

$f(x, y) = y - x^m, \quad m < p$

- $N_0 = 1$
- $N_1 = p$

Definición

Dado $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, consideramos
$N_k := \#\{$ soluciones de $f(x) \equiv 0 \mod p^k\}$ para $k \geq 1$ con $N_0 = 1$.

Ejemplo

$f(x, y) = y - x^m, \quad m < p$

- $N_0 = 1$
- $N_1 = p$
- $N_2 = p^2$

$\vdots$

Definición

Dado $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, consideramos
$N_k := \#\{$ soluciones de $f(x) \equiv 0 \mod p^k\}$ para $k \geq 1$ con $N_0 = 1$.

Ejemplo

$f(x, y) = y - x^m, \quad m < p$

- $N_0 = 1$
- $N_1 = p$
- $N_2 = p^2$

$\vdots$

- $N_k = p^k$

Más ejemplos

Ejemplo

$f(x, y) = y^2 - x^3$

- $N_0 = 1$
- $N_1 = p \quad \text{vía}(t^2, t^3)$

Más ejemplos

Ejemplo

$f(x,y) = y^2 - x^3$

- $N_0 = 1$
- $N_1 = p \quad$ vía(t^2, t^3)
- $N_2 = p(2p-1)$
- $N_3 = p^2(2p-1)$
- $N_4 = p^3(2p-1)$
- $N_5 = p^4(2p-1)$

Más ejemplos

Ejemplo

$f(x,y) = y^2 - x^3$

- $N_0 = 1$
- $N_1 = p \quad \text{vía}(t^2, t^3)$
- $N_2 = p(2p-1)$
- $N_3 = p^2(2p-1)$
- $N_4 = p^3(2p-1)$
- $N_5 = p^4(2p-1)$
- $N_6 = p^5(p^2+p-1)$
- $N_7 = p^6(p^2+p-1)$

Más ejemplos

Ejemplo

$f(x,y) = y^2 - x^3$

- $N_0 = 1$
- $N_1 = p \quad \text{vía}(t^2, t^3)$
- $N_2 = p(2p-1)$
- $N_3 = p^2(2p-1)$
- $N_4 = p^3(2p-1)$
- $N_5 = p^4(2p-1)$
- $N_6 = p^5(p^2+p-1)$
- $N_7 = p^6(p^2+p-1)$
- $N_8 = p^7(2p^2-1)$
- $N_9 = p^8(2p^2-1)$
- $N_{10} = p^9(2p^2-1)$
- $N_{11} = p^{10}(2p^2-1)$

Más ejemplos

Ejemplo

$f(x, y) = y^2 - x^3$

- $N_0 = 1$
- $N_1 = p \quad \text{vía}(t^2, t^3)$
- $N_2 = p(2p - 1)$
- $N_3 = p^2(2p - 1)$
- $N_4 = p^3(2p - 1)$
- $N_5 = p^4(2p - 1)$
- $N_6 = p^5(p^2 + p - 1)$
- $N_7 = p^6(p^2 + p - 1)$

- $N_8 = p^7(2p^2 - 1)$
- $N_9 = p^8(2p^2 - 1)$
- $N_{10} = p^9(2p^2 - 1)$
- $N_{11} = p^{10}(2p^2 - 1)$
- $N_{12} = p^{11}(p^3 + p^2 - 1)$
- $N_{13} = p^{12}(p^3 + p^2 - 1)$

Definición

$$P_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k p^{-nk} t^k.$$

Notemos que esta serie converge absolutamente para $|t| < 1$.

Ejemplo

1. $f(x, y) = y - x^m, \quad P_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k p^{-2k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{t}{p})^k = \frac{1}{1-t/p} = \frac{p}{p-t}$

Definición

$$P_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k p^{-nk} t^k.$$

Notemos que esta serie converge absolutamente para $|t| < 1$.

Ejemplo

1. $f(x,y) = y - x^m, \quad P_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k p^{-2k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{t}{p})^k = \frac{1}{1-t/p} = \frac{p}{p-t}$
2. $f(x,y) = y^2 - x^3, \quad P_f(t) = \frac{p^6+(p^4-p^3)t^2-t^6}{(p-t)(p^5-t^6)}$

Definición

$$P_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k p^{-nk} t^k.$$

Notemos que esta serie converge absolutamente para $|t| < 1$.

Ejemplo

1. $f(x,y) = y - x^m, \quad P_f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k p^{-2k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{t}{p})^k = \frac{1}{1-t/p} = \frac{p}{p-t}$
2. $f(x,y) = y^2 - x^3, \quad P_f(t) = \frac{p^6+(p^4-p^3)t^2-t^6}{(p-t)(p^5-t^6)}$

Conjetura (Borevich y Shafarevich, 1964)

Para cualquier f como arriba, $P_f(t)$ es una función racional de t.

Definición

La función zeta local asociada a $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathbb{Z}_p$ es

$$Z(s, f) := \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s \, d^n x, \quad Re(s) > 0.$$

Definición

La función zeta local asociada a $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathbb{Z}_p$ es

$$Z(s, f) := \int_{\mathbb{Z}_p^n} |f(x)|_p^s \, d^n x, \quad Re(s) > 0.$$

Teorema (Igusa, 1974)

Sea $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}_p[[x_1, \ldots, x_n]]$. Entonces existe un número finito de parejas $(N_E, v_E) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$, $E \in T$, tales que

$$\prod_{E \in T} (1 - p^{v_E - sN_E}) Z(s, f)$$

es un polinomio en p^{-s} con coeficientes racionales.

‘Complex Powers’

Sean $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathbb{R}$ y $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para un número complejo s con $Re(s) > 0$, la función zeta local asociada a (f, ϕ) es

$$Z_\phi(s, f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s \, \phi(x) \, dx.$$

‘Complex Powers’

Sean $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbb{R}$ y $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para un número complejo s con $Re(s) > 0$, la función zeta local asociada a (f, ϕ) es

$$Z_\phi(s, f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s \, \phi(x) \, dx.$$

Esta función (de s) está bien definida y la aplicación $s \to Z\_(s, f)$ es holomorfa en $\{s \in \mathbb{C} \, ; \, Re(s) > 0\}$ con valores en el espacio de distribuciones sobre $\mathbb{R}^n$.

‘Complex Powers’

Sean $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathbb{R}$ y $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para un número complejo s con $Re(s) > 0$, la función zeta local asociada a (f, ϕ) es

$$Z_\phi(s, f) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s \, \phi(x) \, dx.$$

Esta función (de s) está bien definida y la aplicación $s \to Z\_(s, f)$ es holomorfa en $\{s \in \mathbb{C} \, ; \, Re(s) > 0\}$ con valores en el espacio de distribuciones sobre $\mathbb{R}^n$.

Conjetura (Gelfand ~’50)

$Z_\phi(s, f)$ admite una extensión meromorfa a todo $\mathbb{C}$.

Solución 1: Resolución de Singularidades

1. La idea es utilizar una resolución de singularidades de f , es decir, un morfismo $\pi : Y \to \mathbb{R}^n$ que es propio y birracional, con Y no singular, y de tal manera que en coordenadas locales en Y, f y el 'pullback' de dx son monomiales.
2. Luego usamos la fórmula de cambio de variable para reducir el cómputo de la integral $Z_\phi(s, f)$ hasta integrales de monomios.

Solución 1: Resolución de Singularidades

1. La idea es utilizar una resolución de singularidades de f, es decir, un morfismo $\pi : Y \to \mathbb{R}^n$ que es propio y birracional, con Y no singular, y de tal manera que en coordenadas locales en Y, f y el 'pullback' de dx son monomiales.
2. Luego usamos la fórmula de cambio de variable para reducir el cómputo de la integral $Z_\phi(s, f)$ hasta integrales de monomios.

Teorema (Bernstein & Gel'fand ('69) – Atiyah('70))

$Z_\phi(s, f)$ admite una continuación meromorfica a todo $\mathbb{C}$. Cada polo es de la forma

$$-\frac{k_i + \mathbb{N}}{a_i},$$

para algunos enteros k_i, a_i que provienen de la resolución de singularidades de $f = 0$.

Un invariante de f

El umbral log-canónico de f está definido en términos de una resolución de singularidades por

$$lct(f) := \min_i \frac{k_i + 1}{a_i},$$

donde se toma el mínimo sobre todas las 'cartas locales' en Y.

Un invariante de f

El umbral log-canónico de f está definido en términos de una resolución de singularidades por

$$lct(f) := \min_i \frac{k_i + 1}{a_i},$$

donde se toma el mínimo sobre todas las 'cartas locales' en Y.

Corollary

$Z_\phi(s,f)$ es holomorfa en la región $\{s \in \mathbb{C}\ ;\ Re(s) > -lct(f)\}$.

Nota

Hay muchos otros invariantes de f que se pueden definir en términos de (o están vinculados con) los polos de $Z_\phi(s,f)$!

Solución 2:Teoría Algebraica de Operadores Diferenciales

Teorema (Bernstein '72)

Existe un polinomio $b(s)$ no cero en la variable s que satisface la relación

$$b(s)f^s = P(s, x, \partial_x) \cdot f^{s+1},$$

para $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ y $P(s, x, \partial_x) \in \mathbb{C}[s, x, \partial_x]$, donde $\cdot$ se entiende como la acción de P sobre f^{s+1}.

Problema (Abiertos)

1. *Determinar exactamente todos los polos verdaderos de* $Z_\phi(s, f)$.

Problema (Abiertos)

1. *Determinar exactamente todos los polos verdaderos de* $Z_{\phi}(s, f)$.
2. *Encontrar un algoritmo para calcularlos efectivamente.*

Problema (Abiertos)

1. *Determinar exactamente todos los polos verdaderos de* $Z_\phi(s, f)$.
2. *Encontrar un algoritmo para calcularlos efectivamente.*
3. *Funciones zeta topológicas y motívicas.*

Problema (Abiertos)

1. *Determinar exactamente todos los polos verdaderos de* $Z_\phi(s, f)$.
2. *Encontrar un algoritmo para calcularlos efectivamente.*
3. *Funciones zeta topológicas y motívicas.*
4. *Ecuaciones diferenciales* $p-$*ádicas.*

Problema (Abiertos)

1. *Determinar exactamente todos los polos verdaderos de* $Z_\phi(s, f)$.
2. *Encontrar un algoritmo para calcularlos efectivamente.*
3. *Funciones zeta topológicas y motívicas.*
4. *Ecuaciones diferenciales* $p-$*ádicas.*
5. *Algunos invariantes geométricos y/o topológicos de las singularidades de polinomios y/o funciones analíticas.*

Algunas Generalizaciones

1. $f \leftrightsquigarrow \boldsymbol{f} := (f_1, \ldots, f_\ell) : K^n \to K^\ell$ y K arquimediano.

Algunas Generalizaciones

1. $f \leftrightsquigarrow \boldsymbol{f} := (f_1, \ldots, f_\ell) : K^n \to K^\ell$ y K arquimediano.
—–, W. Veys & W.A. Zúñiga Galindo. **Poles of Archimedean Zeta Functions for Analytic Mappings.** J. London Math. Soc. 87 (2013), 1–21.
2. K un campo $p-$ádico.

Algunas Generalizaciones

1. $f \leftrightsquigarrow \boldsymbol{f} := (f_1, \ldots, f_\ell) : K^n \to K^\ell$ y K arquimediano.
   —–, W. Veys & W.A. Zúñiga Galindo. **Poles of Archimedean Zeta Functions for Analytic Mappings.** J. London Math. Soc. 87 (2013), 1–21.
2. K un campo $p-$ádico.
   - —-, & Zúñiga-Galindo W.A., **Local Zeta Functions for Non-degenerate Laurent Polynomials Over $p-$adic Fields.** J. Math. Sci. Univ. Tokyo 20(1) (2013), 1–27.

Algunas Generalizaciones

1. $f \leftrightsquigarrow \boldsymbol{f} := (f_1, \ldots, f_\ell) : K^n \to K^\ell$ y K arquimediano.
—–, W. Veys & W.A. Zúñiga Galindo. **Poles of Archimedean Zeta Functions for Analytic Mappings.** J. London Math. Soc. 87 (2013), 1–21.
2. K un campo $p-$ádico.
    - —-, & Zúñiga-Galindo W.A., **Local Zeta Functions for Non-degenerate Laurent Polynomials Over $p-$adic Fields.** J. Math. Sci. Univ. Tokyo 20(1) (2013), 1–27.
    - —-, Ibadula D., & Segers D., **Poles of the Igusa zeta function of some hybrid polynomials.** Finite Fields Appl. 25 (2014), 37–48.

Figura: Gracias!