

Encuentro Nacional de Jóvenes Investigadores en Matemáticas
Instituto de Matemáticas, Ciudad Universitaria, UNAM

Configuraciones y polinomios: estabilidad y conteos asintóticos

Rita Jiménez Rolland

Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM-Morelia

3 de Diciembre de 2015, México D.F.

Aritmética

conteos/ estadísticas de
polinomios sobre \mathbb{F}_q

conteos asintóticos
sobre \mathbb{F}_q

(términos de error)

Topología

cohomología de
espacios de configuraciones

estabilidad de homológica
y de representaciones

(rango estable)

Objetivos:

Describir los fenómenos de estabilidad
Ilustrar este “puente”

Espacios de configuraciones

El **espacio de configuraciones** de n puntos *ordenados* en \mathbb{C} :

$$\text{PConf}_n(\mathbb{C}) = \{(z_1, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}, z_i \neq z_j\}$$

- El espacio tiene simetrías:

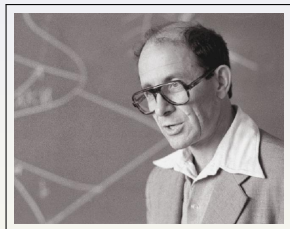
S_n actúa permutando los puntos.
¡La acción es libre!

El **espacio de configuraciones** de n puntos *no ordenados* en \mathbb{C} :

$$\text{Conf}_n(\mathbb{C}) := \text{PConf}_n(\mathbb{C})/S_n = \{\{z_1, \dots, z_n\} : z_i \in \mathbb{C}, z_i \neq z_j\}$$

Configuraciones y polinomios

Vladimir Arnol'd estudió $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$ 1968



$$\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \in \text{Conf}_n(\mathbb{C})$$



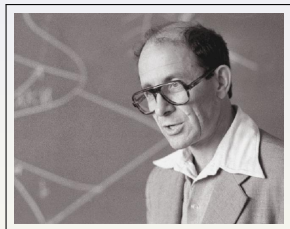
$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

$$\text{Conf}_1(\mathbb{C}) = \{z + c : c \in \mathbb{C}\}$$

$$\text{Conf}_2(\mathbb{C}) = \{z^2 + bz + c : b, c \in \mathbb{C} \text{ y } b^2 - 4c \neq 0\}$$

Configuraciones y polinomios

Vladimir Arnol'd estudió $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$ 1968



$$\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \in \text{Conf}_n(\mathbb{C})$$



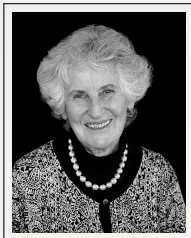
$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

$$\text{Conf}_1(\mathbb{C}) = \{z + c : c \in \mathbb{C}\}$$

$$\text{Conf}_2(\mathbb{C}) = \{z^2 + bz + c : b, c \in \mathbb{C} \text{ y } b^2 - 4c \neq 0\}$$

$$\text{Conf}_n(\mathbb{C}) \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{polinomios m\u00f3nicos de grado } n \\ \text{con coeficientes en } \mathbb{C} \\ \text{sin ra\u00edces repetidas} \end{array} \right\}$$

Trenzas y configuraciones



Joan Birman 1968

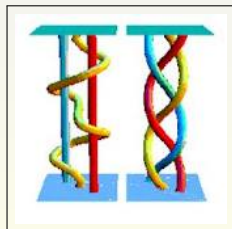
Familia de configuraciones en $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$
traza n cuerdas entrelazadas entre sí:

una TRENZA

El grupo fundamental

$$\pi_1(\text{Conf}_n(\mathbb{C}))$$

es el **grupo de trenzas** B_n

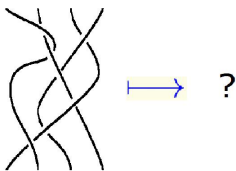


$H^1(\text{Conf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$

Dado un espacio topológico X

$$H^1(X; \mathbb{Z}) := \{ \text{homomorfismos } \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z} \}$$

$$H^1(\text{Conf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) := \text{Hom}(\pi_1(\text{Conf}_n(\mathbb{C})), \mathbb{Z}) = \text{Hom}(B_n, \mathbb{Z})$$



A cada **trenza** en B_n queremos asignarle de manera natural un **número entero**

$$f : B_n \rightarrow \mathbb{Z}$$

$f(\text{trenza}) :=$ índice total de la trenza

$$H^1(\text{Conf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \approx \langle f \rangle \approx \mathbb{Z}$$

Grupos de cohomología del grupo de trenzas

- $H^0(\text{Conf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) \approx \langle \text{componentes conexas} \rangle \approx \mathbb{Q}$
cuando $n \geq 1$
- $H^1(\text{Conf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) \approx H^1(\text{Conf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \approx \mathbb{Q}$
cuando $n \geq 2$
- Para $i \geq 2$, $H^i(\text{Conf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) \approx 0$
cuando $n \geq 1$

Pregunta: ¿Cómo cambia $H^i(\text{Conf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ cuando n crece?

La dimensión del espacio vectorial es eventualmente **constante**

¡NO depende de n !

El fenómeno de estabilidad homológica

Definición

Una sucesión de espacios o grupos $\{X_n\}$ satisface **estabilidad homológica** (sobre un anillo R) si para cada $i \geq 0$

$$H_i(X_n; R) \approx H_i(X_{n+1}; R)$$

cuando $n \gg i$.

Ejemplos:

- (Nakaoka 1961) **Grupos Simétricos** S_n
- (Arnold 1968, Cohen 1972) **Grupos de trenzas** $B_n = \pi_1(\text{Conf}_n(\mathbb{C}))$
- (McDuff 1975, Segal 1979)
Espacios de configuraciones en variedades abiertas
- (Charney 1979, Maazen 1979, van der Kallen 1980)
Grupos Lineales, Grupos Aritméticos (como $SL_n(\mathbb{Z})$)
- (Harer 1985) **“Mapping class groups” de superficies con frontera**
- (Hatcher 1995) **Automorfismos de grupos libres** $Aut(F_n)$

Configuraciones Ordenadas / Grupo de Trenzas Puras

$$H^1(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) := \text{Hom}(\pi_1(\text{PConf}_n(\mathbb{C})), \mathbb{Z}) = \text{Hom}(P_n, \mathbb{Z})$$

P_n es el **grupo de trenzas puras**

$\omega_{i,j} : (\text{trenza pura}) \mapsto (\# \text{ veces que la hebra } i \text{ enrolla la hebra } j)$

$$\omega_{i,j} = \omega_{j,i} \quad \text{para } 1 \leq i \neq j \leq n$$

Hay $\binom{n}{2}$ homomorfismos distintos que generan $H^1(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$:

$$H^1(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^{\binom{n}{2}}$$

Pregunta: ¿Cómo cambia $H^1(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ cuando n crece?

$$\dim H^1(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) \rightarrow \infty \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

¡¡NO hay estabilida (co)homológica!!

Alternativa: considerar las simetrías del espacio

La acción de S_n en $\text{PConf}_n(\mathbb{C})$

induce una acción de S_n en $H^1(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$.

Tenemos,

$\{H^1(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q})\}_n$ es una sucesión de representaciones de S_n

Representaciones de S_n

- *representación*: \mathbb{Q} -espacio vectorial con una acción lineal de S_n
- *subrepresentación*: subespacio invariante
- *irreducible*: no tiene subrepresentaciones

Hecho: Cualquier representación de S_n de dimensión finita se descompone sobre \mathbb{Q} en suma directa de representaciones irreducibles.

Dada una representación V , queremos entender cómo se descompone en irreducibles.

Notación

Las representaciones irreducibles de S_n están clasificadas por particiones de n .

Representaciones irreducibles de S_n	Particiones de n	Notación uniforme
Representación trivial \mathbb{Q}	$n = n + 0$	$V(\cdot)$
Rep estándar \mathbb{Q}^n/\mathbb{Q}	$n = (n - 1) + 1$	$V(\square)$
\wedge^2 (Rep estándar)	$n = (n - 2) + 1 + 1$	$V(\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array})$
\wedge^3 (Rep estándar)	$n = (n - 3) + 1 + 1 + 1$	$V(\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array})$

¿Cómo se ve $H^1(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$?

$$H^1(\text{PConf}_2(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) = V(\cdot)$$

$$H^1(\text{PConf}_3(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) = V(\cdot) \oplus V(\square)$$

$$H^1(\text{PConf}_4(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) = V(\cdot) \oplus V(\square) \oplus V(\square\square)$$

$$H^1(\text{PConf}_5(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) = V(\cdot) \oplus V(\square) \oplus V(\square\square)$$

$$H^1(\text{PConf}_6(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) = V(\cdot) \oplus V(\square) \oplus V(\square\square)$$

$$H^1(\text{PConf}_7(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) = V(\cdot) \oplus V(\square) \oplus V(\square\square)$$

Pregunta: ¿Cómo cambia $H^1(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ cuando n crece?

$$H^1(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) = V(\cdot) \oplus V(\square) \oplus V(\square\square)$$

para $n = 4, 5, 6, \dots$

Estabilidad de representaciones

Definición: Grosso modo...

Una sucesión de representaciones racionales $\{V_n\}$ satisface **estabilidad de representaciones uniforme** si la *multiplicidad* de las representaciones irreducibles en V_n es eventualmente *constante* e independiente de n .

Pregunta: ¿Cómo cambia $H^i(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ cuando n crece?

Teorema[Church-Farb, 2010] Para cada $i \geq 0$, la sucesión $H^i(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ satisface estabilidad de representaciones uniforme.

Otros ejemplos:

- (Church 2011) **Configuraciones ordenadas en cualquier variedad M**
- (Jiménez Rolland 2013) **Espacios modulares, “mapping class group” puros**
- (Wilson 2014) **Grupo de automorfismos simétricos puros, arreglos de hiperplanos y variedades bandera de tipo B**

Polinomios con “otros” coeficientes

Hecho clásico:

Conf_n es una variedad algebraica definida sobre \mathbb{Z} .

$$\mathcal{P}oly_n := \{ \text{polinomios m\u00f3nicos de grado } n \} \cong \mathbb{A}^n$$

Conf_n = subvariedad de $\mathcal{P}oly_n$ definido por los puntos donde el discriminante no se anula

Para un campo \mathbb{K} , los \mathbb{K} -puntos

$\text{Conf}_n(\mathbb{K}) =$ polinomios m\u00f3nicos, de grado n , en $\mathbb{K}[T]$
sin ra\u00edces repetidas

$$\mathbb{K} = \mathbb{F}_q \quad \text{v.s.} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

$$\text{Conf}_n(\mathbb{F}_q) \quad \text{v.s.} \quad \text{Conf}_n(\mathbb{C})$$

El “puente” entre topología y aritmética: ejemplo

La fórmula del punto fijo de Grothendieck-Lefschetz:

$$\sum_{f \in \text{Conf}_n(\mathbb{F}_q)} 1 = \sum_{k=0}^n (-1)^k q^{n-k} \dim_{\mathbb{C}} H^k(\text{Conf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{C})$$
$$|\text{Conf}_n(\mathbb{F}_q)| = q^n P_{\text{Conf}_n(\mathbb{C})}(-q^{-1})$$

Topología: (Arnol'd, F.Cohen)

$$H^k(\text{Conf}_n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathbb{Q} & k = 0 \\ \mathbb{Q} & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

Conteos sobre campos finitos: $\#\text{Conf}_n(\mathbb{F}_q) = q^n - q^{n-1}$

estabilidad homológica = “misma” fórmula para todo n

El “puente” entre topología y aritmética: ejemplo

$X_1(f) :=$ Número de raíces en \mathbb{F}_q de $f \in \text{Conf}_n(\mathbb{F}_q)$

$$\sum_{f \in \text{Conf}_n(\mathbb{F}_q)} X_1(f) = \sum_{k=0} (-1)^k q^{n-k} [\text{mult de } V_n \text{ en } H^k(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{C})]$$

$V_n := \mathbb{C}^n$ con la acción de S_n que permuta las coordenadas.

El “puente” entre topología y aritmética: ejemplo

$X_1(f) :=$ Número de raíces en \mathbb{F}_q de $f \in \text{Conf}_n(\mathbb{F}_q)$

$$\sum_{f \in \text{Conf}_n(\mathbb{F}_q)} X_1(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{n-k} [\text{mult de } V_n \text{ en } H^k(\text{PConf}_n(\mathbb{C}); \mathbb{C})]$$

$V_n := \mathbb{C}^n$ con la acción de S_n que permuta las coordenadas.

Estabilidad de representaciones \Rightarrow podemos tomar límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} \sum_{f \in \text{Conf}_n(\mathbb{F}_q)} X_1(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{-k} [\text{mult estable de } V_n]$$

Topología: (Lehrer-Solomon)

$$\langle X_1, H^k(\text{PConf}_n(\mathbb{C})) \rangle_{S_n} = \begin{cases} 0 & n \leq k \\ 1 & n = k + 1 \\ 2 & n \geq k + 2 \end{cases}$$

Conteos sobre campos finitos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{f \in \text{Conf}_n(\mathbb{F}_q)} X_1(f)}{|\text{Conf}_n(\mathbb{F}_q)|} = 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^3} + \dots = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{q-1}{q+1}\right)$$

Estabilidad de representaciones y conteos asintóticos

Teorema (Grothendieck-Lefschetz, Artin, Lehrer, Kim,...)

Sea q la potencia de un primo impar y χ una función de clase de \mathcal{W}_n , entonces

$$\sum_{f \in \mathcal{Y}_{\mathcal{W}_n}(\mathbb{F}_q)} \chi(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^k q^{n-k} \langle \chi, H^k(\mathcal{M}_{\mathcal{W}_n}(\mathbb{C}); \mathbb{C}) \rangle_{\mathcal{W}_n}.$$

Estabilidad de representaciones y conteos asintóticos

Teorema (Grothendieck-Lefschetz, Artin, Lehrer, Kim,...)

Sea q la potencia de un primo impar y χ una función de clase de \mathcal{W}_n , entonces

$$\sum_{f \in \mathcal{Y}_{\mathcal{W}_n}(\mathbb{F}_q)} \chi(f) = \sum_{k=0}^n (-1)^k q^{n-k} \langle \chi, H^k(\mathcal{M}_{\mathcal{W}_n}(\mathbb{C}); \mathbb{C}) \rangle_{\mathcal{W}_n}.$$

Theorem (Church–Ellenberg–Farb, J. R.–Wilson)

Sea q la potencia de un primo impar y P polinomio de caracteres de \mathcal{W}_n , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^{-n} \sum_{f \in \mathcal{Y}_{\mathcal{W}_n}(\mathbb{F}_q)} P(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{-k} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle P, H^k(\mathcal{M}_{\mathcal{W}_n}(\mathbb{C}); \mathbb{C}) \rangle_{\mathcal{W}_n}.$$

y la serie converge.

Gracias