Número de cruce en gráficas

Jesús Leaños

ENJIM15

Diciembre 2015

Contenido

1. Conceptos Básicos
2. El origen del problema: $\mathrm{cr}(K_{m,n})$
3. Otras familias de gráficas...
4. ¿Qué se sabe en general?
5. Número de cruce rectilíneo
6. Número de cruce pseudolineal
7. Algunos avances
8. Algunos problemas abiertos

Conceptos Básicos

Un dibujo de una gráfica

Un *dibujo* de una gráfica G (en el plano) consta de un conjunto de puntos, uno por cada vértice de G, y una colección de arcos abiertos simples, uno por cada arista de la gráfica, tal que si e es una arista de G con extremos u y v, entonces la cerradura topológica del arco α que representa a e consiste de α y los dos puntos que representan a u y v.

Un dibujo de una gráfica

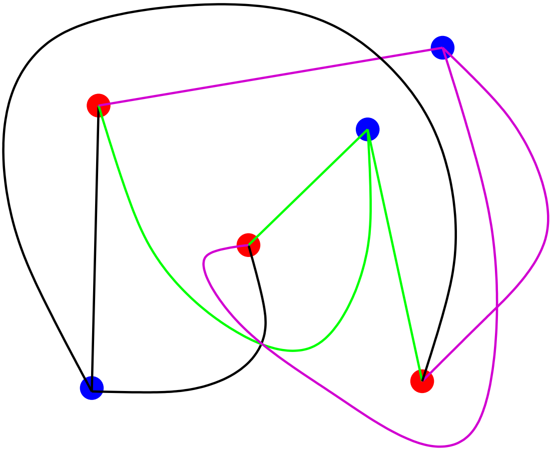


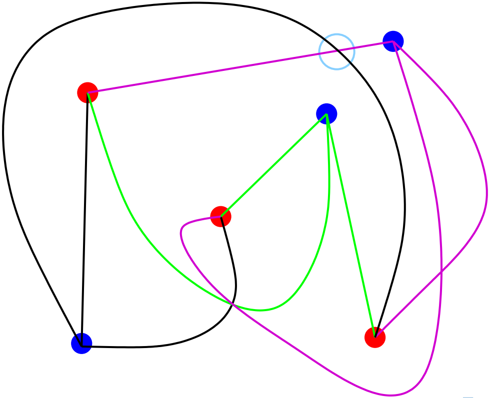
Figura: Un dibujo de $K_{3,3}$

Un dibujo de una gráfica

Dos aristas se *cruzan en un dibujo* en cierto punto, o el punto es un punto de cruce de las aristas, si dicho punto pertenece al interior de los arcos que representan las aristas

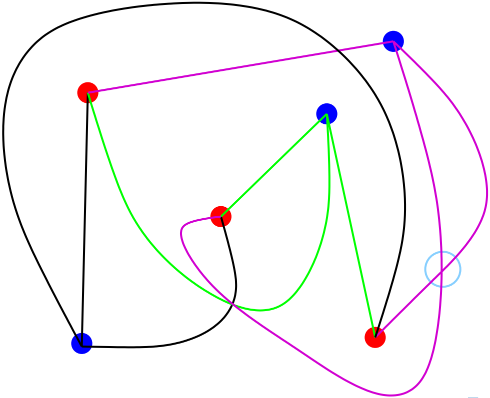
Un dibujo de una gráfica

Dos aristas se *cruzan en un dibujo* en cierto punto, o el punto es un punto de cruce de las aristas, si dicho punto pertenece al interior de los arcos que representan las aristas



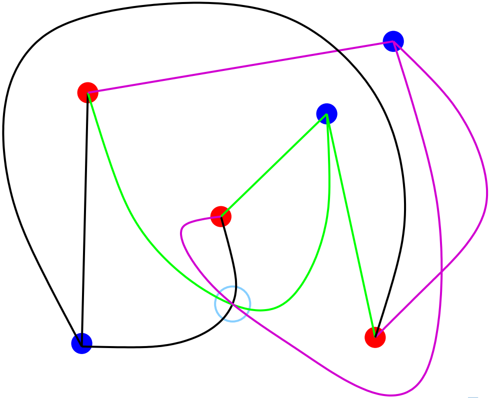
Un dibujo de una gráfica

Dos aristas se *cruzan en un dibujo* en cierto punto, o el punto es un punto de cruce de las aristas, si dicho punto pertenece al interior de los arcos que representan las aristas



Un dibujo de una gráfica

Dos aristas se *cruzan en un dibujo* en cierto punto, o el punto es un punto de cruce de las aristas, si dicho punto pertenece al interior de los arcos que representan las aristas



Decimos que un dibujo es *bueno* si:

Número de cruce

El número de cruce $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ en un dibujo bueno $\mathcal{D}$ es la suma de los cruces.

Número de cruce

El número de cruce $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ en un dibujo bueno $\mathcal{D}$ es la suma de los cruces.

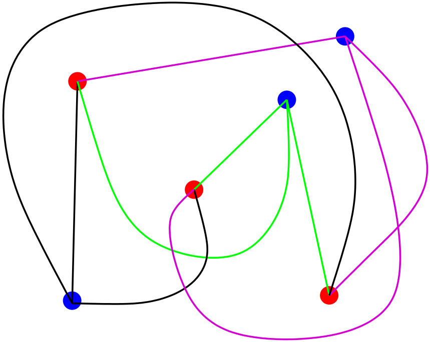
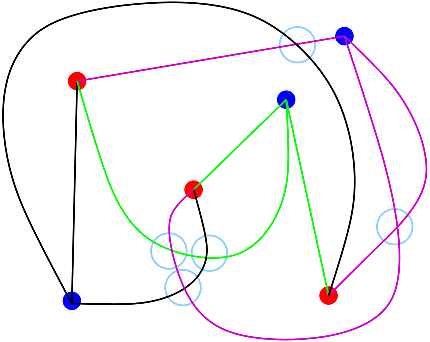


Figura: Dibujo *bueno* $\mathcal{D}$ de $K_{3,3}$

Número de cruce

El número de cruce $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ en un dibujo bueno $\mathcal{D}$ es la suma de los cruces.



$$\mathrm{cr}(\mathcal{D}) = 5$$

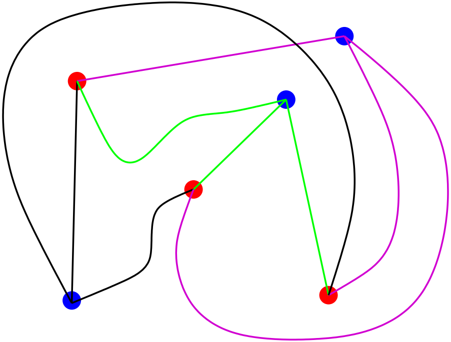
Figura: Dibujo *bueno* $\mathcal{D}$ de $K_{3,3}$

Número de cruce

El número de cruce $\mathrm{cr}(G)$ de una gráfica G es el mínimo de $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ sobre todos los dibujos $\mathcal{D}$ de G.

Número de cruce

El número de cruce $\mathrm{cr}(G)$ de una gráfica G es el mínimo de $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ sobre todos los dibujos $\mathcal{D}$ de G.



$$\mathrm{cr}(K_{3,3}) = 1$$

Figura: Dibujo *bueno* $\mathcal{D}$ de $K_{3,3}$

Número de cruce

El número de cruce $\mathrm{cr}(G)$ de una gráfica G es el mínimo de $\mathrm{cr}(\mathcal{D})$ sobre todos los dibujos $\mathcal{D}$ de G.

Problema:

Determinar el número de cruce de una gráfica G.

El origen del problema: $\mathrm{cr}(K_{m,n})$

Paul Turán, 1944: "*Our work was to bring out bricks from the ovens where they were made and carry them on small vehicles which run on rails in some of several open stores which happened to be empty. Since one could never be sure which store will be available, each oven was connected by rail with each store. Since we had to settle a fixed amount of loaded cars daily it was our interest to finish it as soon as possible. After being loaded in the (rather warm) ovens the vehicles run smoothly with not much effort; the only trouble arose at the crossing of two rails. Here the cars jumped out, the bricks fell down; a lot of extra work and loss of time arose. Having this experience a number of times it occurred to me why on earth did they build the rail system so uneconomically; mini- mizing the number of crossings the production could be made much more economical.*"

La familia de gráficas correspondiente...

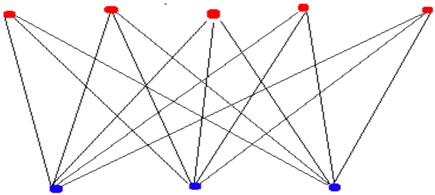


Figura: Gráfica bipartita completa $K_{3,5}$

Las gráficas bipartitas completas...

$$\mathrm{cr}(K_{m,n}) = ?...$$

Las gráficas bipartitas completas...

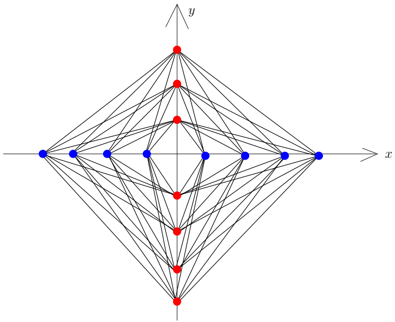
$$\mathrm{cr}(K_{m,n}) = ?...$$

Conjetura (Zarankiewicz, 1954)

$$\mathrm{cr}(K_{m,n}) = \lfloor \tfrac{m}{2} \rfloor \lfloor \tfrac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \lfloor \tfrac{n-1}{2} \rfloor$$

La conjetura de Zarankiewicz...

$$\mathrm{cr}(K_{m,n}) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$$



Principales avances respecto a esta conjetura...

Principales avances respecto a esta conjetura...

- En 1970 D. J. Kleitman confirmó la conjetura de Zarankiewicz para $K_{m,n}$ con $min\{m, n\} \leq 6$.

Principales avances respecto a esta conjetura...

- En 1970 D. J. Kleitman confirmó la conjetura de Zarankiewicz para $K_{m,n}$ con $min\{m,n\} \leq 6$.

Principales avances respecto a esta conjetura...

- En 1970 D. J. Kleitman confirmó la conjetura de Zarankiewicz para $K_{m,n}$ con $min\{m,n\} \leq 6$.
- En 1993 D. R. Woodall demostró la conjetura para $K_{7,n}$ y $K_{8,n}$ con $n = 7, 8, 9, 10$.

Principales avances respecto a esta conjetura...

- En 1970 D. J. Kleitman confirmó la conjetura de Zarankiewicz para $K_{m,n}$ con $min\{m,n\} \leq 6$.
- En 1993 D. R. Woodall demostró la conjetura para $K_{7,n}$ y $K_{8,n}$ con $n = 7, 8, 9, 10$.

Principales avances respecto a esta conjetura...

- En 1970 D. J. Kleitman confirmó la conjetura de Zarankiewicz para $K_{m,n}$ con $min\{m,n\} \leq 6$.
- En 1993 D. R. Woodall demostró la conjetura para $K_{7,n}$ y $K_{8,n}$ con $n = 7, 8, 9, 10$.
- En 2011 R. Christian, B. Richter y G. Salazar probaron el siguiente resultado:

Theorem

Sea m un entero positivo, $Z(m) := \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ y $N_0(m) := ((2Z(m))^{m!}(m!)!)^4$. Si, para cada $n \leq N_0(m)$, $cr(K_{m,n}) = Z(m)Z(n)$, entonces, para cada n, $cr(K_{m,n}) = Z(m)Z(n)$.

Otras familias de gráficas...

Las gráficas completas...

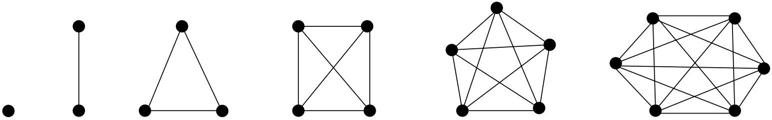


Figura: De izquierda a derecha $K_1, K_2, \ldots, K_6$.

Las gráficas completas...

$$\mathrm{cr}(K_n) = ?...$$

Las gráficas completas...

$$\mathrm{cr}(K_n) = ?\ldots$$

Conjetura (Anthony Hill, 1960)

$$\mathrm{cr}(K_n) = \begin{cases} (1/64)(n-1)^2(n-3)^2 & \text{si } n \text{ impar} \\ (1/64)n(n-2)^2(n-4) & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

Principales avances respecto a la conjetura de Hill...

Principales avances respecto a la conjetura de Hill...

- En 1964 J. Blazek y M. Koman establecieron que:

$$\mathrm{cr}(K_n) \leq \frac{1}{64} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Principales avances respecto a la conjetura de Hill...

- En 1964 J. Blazek y M. Koman establecieron que:

$$\mathrm{cr}(K_n) \leq \frac{1}{64}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Principales avances respecto a la conjetura de Hill...

- En 1964 J. Blazek y M. Koman establecieron que:

$$\mathrm{cr}(K_n) \leq \frac{1}{64} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

- En 1969 R. K. Guy observó que:

$$\mathrm{cr}(K_n) \geq \frac{\binom{n}{5}}{n-4} = \frac{1}{120} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Nota: R. Guy considera el número total de K_5's distintos que están contenidos en un K_n, y observa que en un dibujo óptimo de K_n, cada cruce (el cual "inhabilita" a 4 vértices) puede ser sobrecontado a lo más $n-4$ veces.

Principales avances respecto a la conjetura de Hill...

- En 1964 J. Blazek y M. Koman establecieron que:

$$\mathrm{cr}(K_n) \leq \frac{1}{64}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

- En 1969 R. K. Guy observó que:

$$\mathrm{cr}(K_n) \geq \frac{\binom{n}{5}}{n-4} = \frac{1}{120}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Nota: R. Guy considera el número total de K_5's distintos que están contenidos en un K_n, y observa que en un dibujo óptimo de K_n, cada cruce (el cual "inhabilita" a 4 vértices) puede ser sobrecontado a lo más $n-4$ veces.

Principales avances respecto a la conjetura de Hill...

- En 1964 J. Blazek y M. Koman establecieron que:

$$\mathrm{cr}(K_n) \leq \frac{1}{64} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

- En 1969 R. K. Guy observó que:

$$\mathrm{cr}(K_n) \geq \frac{\binom{n}{5}}{n-4} = \frac{1}{120} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

  Nota: R. Guy considera el número total de K_5's distintos que están contenidos en un K_n, y observa que en un dibujo óptimo de K_n, cada cruce (el cual "inhabilita" a 4 vértices) puede ser sobrecontado a lo más $n-4$ veces.

- En 2007 S. Pan y B. Richter confirmaron la conjetura de Anthony Hill para $n \leq 12$.

Producto de ciclos...

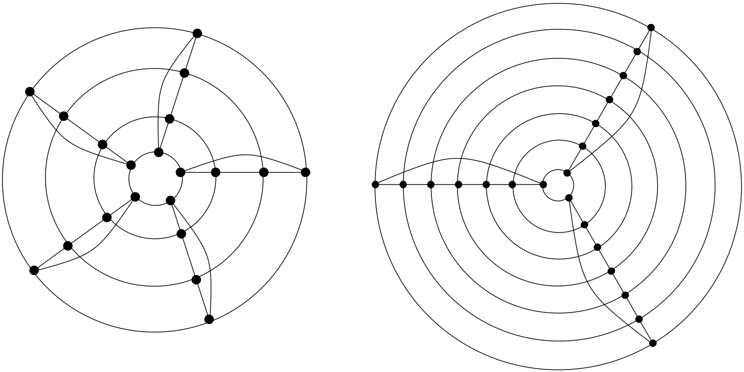


Figura: A la izquierda $C_4 \times C_5$. A la derecha $C_7 \times C_3$.

Producto de ciclos...

- Probablemente la principal motivación para estudiar $cr(C_n \times C_m)$ fue el hecho de que mientras $C_n \times C_m$ puede encajarse naturalmente en el toro; dicha gráfica parece tener un número de cruces arbitrariamente grande en el plano.

Producto de ciclos...

- Probablemente la principal motivación para estudiar $cr(C_n \times C_m)$ fue el hecho de que mientras $C_n \times C_m$ puede encajarse naturalmente en el toro; dicha gráfica parece tener un número de cruces arbitrariamente grande en el plano.

Producto de ciclos...

- Probablemente la principal motivación para estudiar $cr(C_n \times C_m)$ fue el hecho de que mientras $C_n \times C_m$ puede encajarse naturalmente en el toro; dicha gráfica parece tener un número de cruces arbitrariamente grande en el plano.

Conjetura (Harary, 1973)

Si n, m son enteros tales que $3 \leq m \leq n$, entonces $\mathrm{cr}(C_n \times C_m) = (m-2)n$.

$$\mathrm{cr}(C_n \times C_m) = (m-2)n$$

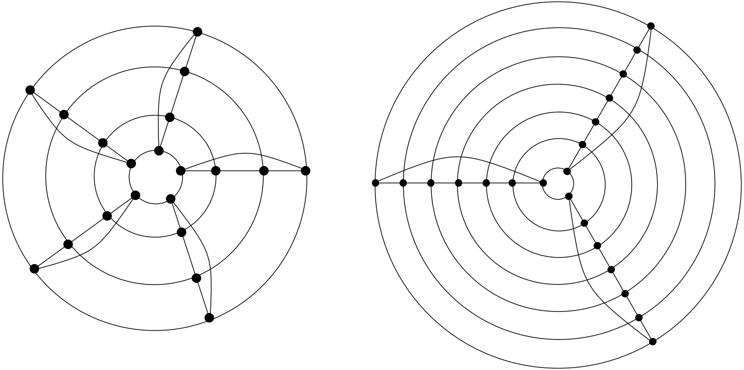


Figura: Mejores dibujos conocidos de $C_n \times C_m$

Principales avances respecto a la conjetura de Harary...

Principales avances respecto a la conjetura de Harary...

- En 1998 C. Myers confirmó la conjetura de Harary para $m \leq 7$.

Principales avances respecto a la conjetura de Harary...

- En 1998 C. Myers confirmó la conjetura de Harary para $m \leq 7$.

Principales avances respecto a la conjetura de Harary...

- En 1998 C. Myers confirmó la conjetura de Harary para $m \leq 7$.
- En 2004 L. Glebsky y G. Salazar demotraron que la conjetura de Harary es cierta para cada par de enteros $m \geq n \geq 3$ tales que $n \geq m(m+1)$.

Principales avances respecto a la conjetura de Harary...

- En 1998 C. Myers confirmó la conjetura de Harary para $m \leq 7$.
- En 2004 L. Glebsky y G. Salazar demotraron que la conjetura de Harary es cierta para cada par de enteros $m \geq n \geq 3$ tales que $n \geq m(m+1)$.

Principales avances respecto a la conjetura de Harary...

- En 1998 C. Myers confirmó la conjetura de Harary para $m \leq 7$.
- En 2004 L. Glebsky y G. Salazar demotraron que la conjetura de Harary es cierta para cada par de enteros $m \geq n \geq 3$ tales que $n \geq m(m+1)$.

¿Qué se sabe en general?

¿Qué se sabe en general?...

- Cada gráfica se puede encajar en $\mathbb{R}^3$ sin cruces.

¿Qué se sabe en general?...

- Cada gráfica se puede encajar en $\mathbb{R}^3$ sin cruces.

¿Qué se sabe en general?...

- Cada gráfica se puede encajar en $\mathbb{R}^3$ sin cruces.
- Una gráfica es planar si y sólo si no contiene como subgráfica a una subsdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ (Kuratowski, 1932).

¿Qué se sabe en general?...

- Cada gráfica se puede encajar en $\mathbb{R}^3$ sin cruces.
- Una gráfica es planar si y sólo si no contiene como subgráfica a una subsdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ (Kuratowski, 1932).

¿Qué se sabe en general?...

- Cada gráfica se puede encajar en $\mathbb{R}^3$ sin cruces.
- Una gráfica es planar si y sólo si no contiene como subgráfica a una subsdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ (Kuratowski, 1932).
- El problema del número de cruce es NP-completo (Garey y Johnson, 1983).

¿Qué se sabe en general?...

- El problema del número de cruce es NP-completo incluso para gráficas casi-planares (Cabello, Mohar, 2010).

¿Qué se sabe en general?...

- El problema del número de cruce es NP-completo incluso para gráficas casi-planares (Cabello, Mohar, 2010).

¿Qué se sabe en general?...

- El problema del número de cruce es NP-completo incluso para gráficas casi-planares (Cabello, Mohar, 2010).
- El número de cruce es aditivo sobre $2, 3$-cortes de aristas (D. Bokal, M. Chimani, J. L., y G. Salazar 2008).

¿Qué se sabe en general?...

- El problema del número de cruce es NP-completo incluso para gráficas casi-planares (Cabello, Mohar, 2010).
- El número de cruce es aditivo sobre $2,3$-cortes de aristas (D. Bokal, M. Chimani, J. L., y G. Salazar 2008).
- Existe una constante positiva c tal que, para cada gráfica G con n vértices y $m \geq 4n$ aristas, $\mathrm{cr}(G) \geq cm^3/n^2$ ("Crossing Lemma", Pach y Tóth, 1997).

Número de cruce rectilíneo

Dibujos rectilíneos

Un dibujo será rectilíneo si cada arista es representada por un segmento de recta.

Dibujos rectilíneos

Un dibujo será rectilíneo si cada arista es representada por un segmento de recta.

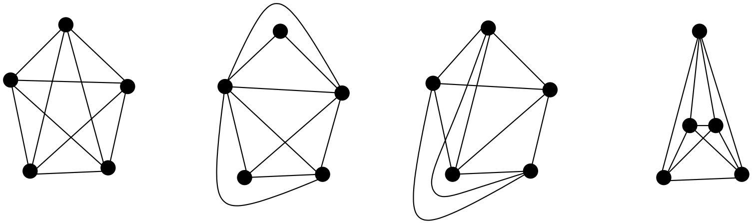


Figura: Cuatro dibujos de K_5. Sólo los dos dibujos extremos son rectilíneos.

Dibujos rectilíneos

El número rectilíneo de cruce de una gráfica G se define como sigue:

$$\overline{\mathrm{cr}}(G) := min\{\mathrm{cr}(\mathcal{D}) \mid \mathcal{D} \text{ es un dibujo rectilíneo de } G\}.$$

Dado que el conjunto de todos los dibujos rectilíneos de una gráfica G, es un subconjunto propio del conjunto de dibujos de G; entonces,

$$\mathrm{cr}(G) \leq \overline{\mathrm{cr}}(G).$$

Dibujos rectilíneos

En general, se sabe que $\mathrm{cr}(G) < \overline{\mathrm{cr}}(G)$.

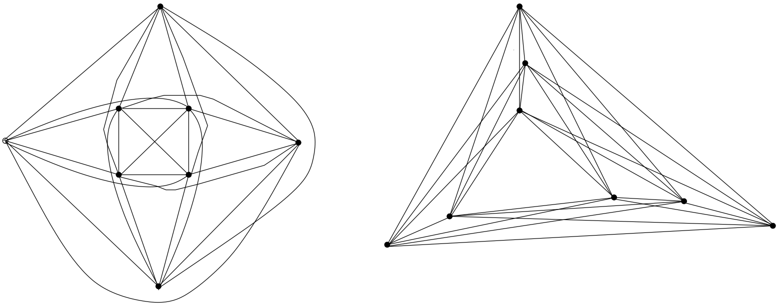


Figura: A la izquierda un dibujo óptimo de K_8 con 18 cruces. A la derecha un dibujo rectilíneo óptimo de K_8 con 19 cruces.

Número de cruce pseudolineal

Dibujos pseudolineales

- Una pseudolínea en $\mathbb{R}^2$ es una curva continua en el plano que no se auto-intersecta y que al ser removida, desconceta al plano en dos regiones conexas de área infinita.

Dibujos pseudolineales

- Una pseudolínea en $\mathbb{R}^2$ es una curva continua en el plano que no se auto-intersecta y que al ser removida, desconceta al plano en dos regiones conexas de área infinita.

Dibujos pseudolineales

- Una pseudolínea en $\mathbb{R}^2$ es una curva continua en el plano que no se auto-intersecta y que al ser removida, desconceta al plano en dos regiones conexas de área infinita.

- Un arreglo de pseudolíneas en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto finito de pseudolíneas en el que cada par de ellas se cruzan exactamente una vez.

Dibujos pseudolineales

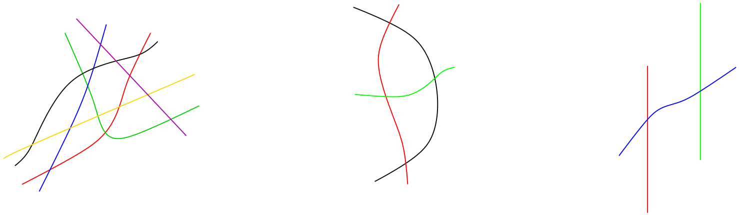


Figura: Sólo el de la izquierda es un arreglo de pseudolíneas.

Dibujos pseudolineales

Sea G una gráfica. Un dibujo $\mathcal{D}$ de G será pseudolineal, si es posible obtener un arreglo de pseudolíneas a partir de $\mathcal{D}$ mediante la prolongación indefinida de cada una de sus aristas.

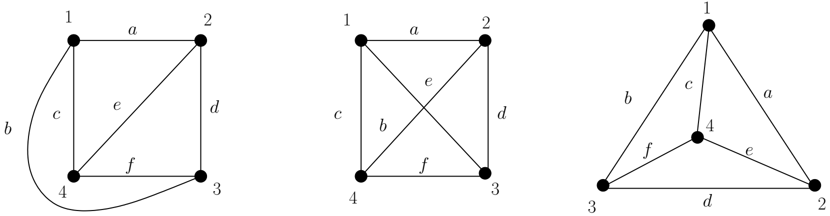


Figura: Los dos dibujos de la derecha si son pseudolineales, pero el de la izquierda no es pseudolineal.

Número de cruce pseudolineal

- El número pseudolíneal de cruce de una gráfica G se define como sigue:

  $\widetilde{\mathrm{cr}}(G) := min\{\mathrm{cr}(D) \mid \mathcal{D}$ es un dibujo pseuolineal de $G\}$.

Número de cruce pseudolineal

- El número pseudolíneal de cruce de una gráfica G se define como sigue:

$$\widetilde{\mathrm{cr}}(G) := min\{\mathrm{cr}(D) \mid \mathcal{D} \text{ es un dibujo pseuolineal de } G\}.$$

Número de cruce pseudolineal

- El número pseudolíneal de cruce de una gráfica G se define como sigue:

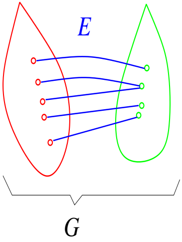
$$\widetilde{\mathrm{cr}}(G) := min\{\mathrm{cr}(D) \mid \mathcal{D} \text{ es un dibujo pseuolineal de } G\}.$$

- Dado que el conjunto de todos los dibujos pseudolineales de una gráfica G, es un subconjunto propio del conjunto de dibujos de G, y dado que el conjunto de todos los dibujos rectilíneos de una gráfica G, es un subconjunto propio del conjunto de dibujos pseudolineales de G, entonces

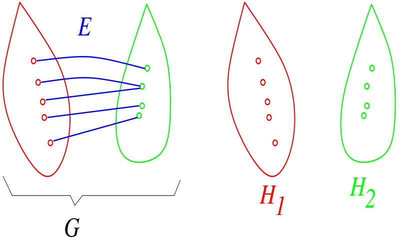
$$\mathrm{cr}(G) \leq \widetilde{\mathrm{cr}}(G) \leq \overline{\mathrm{cr}}(G).$$

Algunos avances

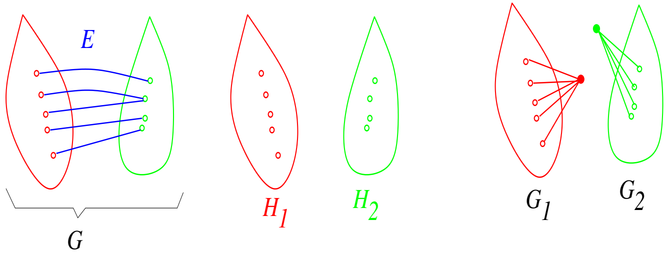
Aditividad del número de cruce sobre cortes de aristas



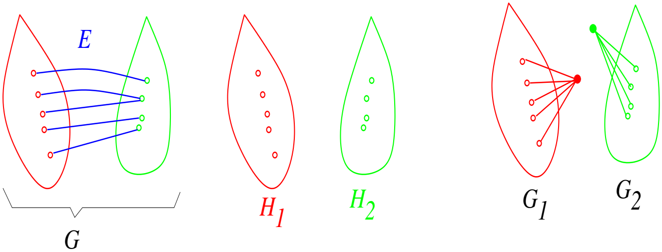
Aditividad del número de cruce sobre cortes de aristas



Aditividad del número de cruce sobre cortes de aristas



Aditividad del número de cruce sobre cortes de aristas



$$cr(G)=cr(G1)+cr(G2)\ ??$$

Aditividad del número de cruce sobre cortes de aristas

Respuestas:

- Si $k = 2$, entonces $cr(G) = cr(G_1) + cr(G_2)$ (J. L., G. Salazar, 2003).

Aditividad del número de cruce sobre cortes de aristas

Respuestas:

- Si $k = 2$, entonces $cr(G) = cr(G_1) + cr(G_2)$ (J. L., G. Salazar, 2003).

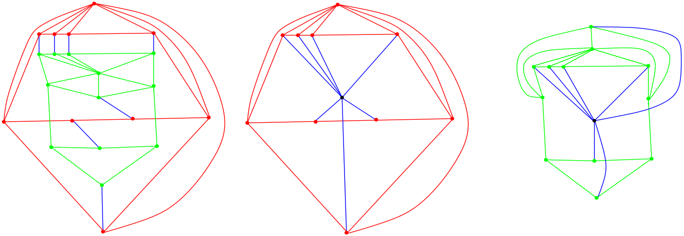
- Si $k \geq 4$, entonces $cr(G) \neq cr(G_1) + cr(G_2)$ (D. Bokal, L. Beaudou, 2007).

Aditividad del número de cruce sobre cortes de aristas

Respuestas:

- Si $k = 2$, entonces $cr(G) = cr(G_1) + cr(G_2)$ (J. L., G. Salazar, 2003).
- Si $k \geq 4$, entonces $cr(G) \neq cr(G_1) + cr(G_2)$ (D. Bokal, L. Beaudou, 2007).
- Si $k = 3$, entonces $cr(G) = cr(G_1) + cr(G_2)$ (D. Bokal, M. Chimani, J. L., 2011)

Aditividad del número de cruce sobre cortes de aristas



cr(G)=2 *cr(G1)=1* *cr(G2)=2*

Figura: Aquí $cr(G) < cr(G_1) + cr(G_2)$.

Avances sobre la determinación de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ para $n \leq 9$ (R. K. Guy, 1972)

Avances sobre la determinación de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ para $n \leq 9$ (R. K. Guy, 1972)

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_{10})$ (A. Brodsky, S. Durocher, y E. Gethner, 2001).

Avances sobre la determinación de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ para $n \leq 9$ (R. K. Guy, 1972)

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_{10})$ (A. Brodsky, S. Durocher, y E. Gethner, 2001).

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_{11})$ y $\overline{\mathrm{cr}}(K_{12})$ (Aichholzer, Aurenhammer, y Krasser, 2006)

Avances sobre la determinación de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ for $n = 13, \ldots, 19$ and 21
  (O. Aichholzer, J. García, D. Orden, and P. Ramos, 2007)

Avances sobre la determinación de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ for $n = 13, \ldots, 19$ and 21
  (O. Aichholzer, J. García, D. Orden, and P. Ramos, 2007)

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ para $n = 20, 22, \ldots, 27$
  (B. Ábrego, S. Fernández-Merchant, J. L., G. Salazar, 2008).

Avances sobre la determinación de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ for $n = 13, \ldots, 19$ and 21
  (O. Aichholzer, J. García, D. Orden, and P. Ramos, 2007)

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$ para $n = 20, 22, \ldots, 27$
  (B. Ábrego, S. Fernández-Merchant, J. L., G. Salazar, 2008).

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_{30})$ (M. Cetina, C. Hernández-Vélez, J. L., C. Villalobos, 2010).

Avances sobre la determinación de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

Números de cruce rectilíneo conocidos.

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$	1	3	9	19	36	62	102	153	229	324

n	15	16	17	18	19	20	21
$\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$	447	603	798	1029	1318	1657	2055

n	22	23	24	25	26	27	30
$\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$	2528	3077	3699	4430	5250	6180	9726

Avances sobre la determinación de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

Cotas asintóticas para $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_n) \geq 0.379972\binom{n}{4} + O(n^3)$.
  (B. Ábrego, M. Cetina, S. Fernández-Merchant, J. L., G. Salazar, 2012).

Avances sobre la determinación de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

Cotas asintóticas para $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_n) \geq 0.379972\binom{n}{4} + O(n^3)$.
  (B. Ábrego, M. Cetina, S. Fernández-Merchant, J. L., G. Salazar, 2012).

- $\mathrm{cr}(K_n) \leq 0.380473\binom{n}{4} + O(n^3)$.
  (R. Fabila-Monroy and J. López, 2014)

Avances sobre la determinación de $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

Cotas asintóticas para $\overline{\mathrm{cr}}(K_n)$

- $\overline{\mathrm{cr}}(K_n) \geq 0.379972\binom{n}{4} + O(n^3)$.
  (B. Ábrego, M. Cetina, S. Fernández-Merchant, J. L., G. Salazar, 2012).

- $\mathrm{cr}(K_n) \leq 0.380473\binom{n}{4} + O(n^3)$.
  (R. Fabila-Monroy and J. López, 2014)

- $0.379972\binom{n}{4} + O(n^3) \leq \overline{\mathrm{cr}}(K_n) \leq 0.380473\binom{n}{4} + O(n^3)$

  0.000501

Número de cruce pseudolineal

En 2014 C. Hernández-Vélez, J. L., y G. Salazar demostraron que:

- PseudolinearCrossingNumber es NP-duro

Número de cruce pseudolineal

En 2014 C. Hernández-Vélez, J. L., y G. Salazar demostraron que:

- PseudolinearCrossingNumber es NP-duro

- Para cualquier par de enteros k, m con $m \geq k \geq 4$, existe una gráfica G con $\mathrm{cr}(G) = k$ y $\widetilde{\mathrm{cr}}(G) \geq m$

Número de cruce pseudolineal

En 2014 C. Hernández-Vélez, J. L., y G. Salazar demostraron que:

- PseudolinearCrossingNumber es NP-duro
- Para cualquier par de enteros k, m con $m \geq k \geq 4$, existe una gráfica G con $\mathrm{cr}(G) = k$ y $\widetilde{\mathrm{cr}}(G) \geq m$
- Para cada entero $m \geq 1$ existe una gráfica G tal que $\widetilde{\mathrm{cr}}(G) = 36(1+4m)$ y $\overline{\mathrm{cr}}(G) \geq 36(1+4m) + m$

Número de cruce pseudolineal

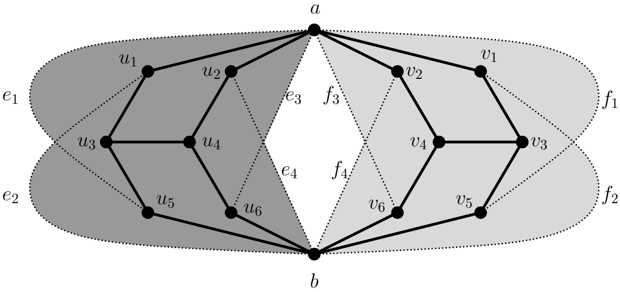
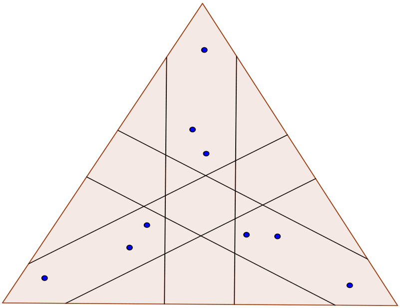


Figura: Aquí $\mathrm{cr}(G) << \widetilde{\mathrm{cr}}(G)$.

Algunos problemas abiertos

Algunos problemas abiertos

1) Estudiar la estructura de los dibujos rectilíneos óptimos de K_n



Algunos problemas abiertos

2) Caracterizar a las gráficas que pueden convertirse en críticas en cruces mediante aristas paralelas.

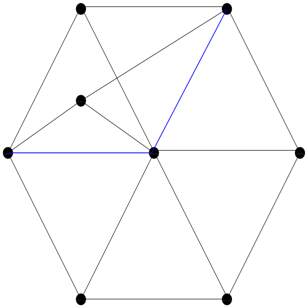
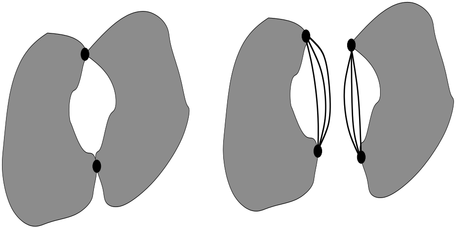


Figura: Nunca va a poder ser crítica en cruces

Algunos problemas abiertos

3) Estudiar la aditividad del número de cruce con respecto a cortes de vértices.



Gracias por su atención!