Difeomorfismos Hamiltonianos

Andrés Pedroza

Universidad de Colima

El grupo de simetrías de poligonos regulares

¿Cúal es el grupo de simetrías del triángulo equilátero?

El grupo de simetrías de poligonos regulares

¿Cúal es el grupo de simetrías del triángulo equilátero?

El grupo consiste en

- tres reflexiones
- dos rotaciones

En particular es un grupo finito.

El grupo de simetrías de poligonos regulares

¿Cúal es el grupo de simetrías del triángulo equilátero?

El grupo consiste en

- tres reflexiones
- dos rotaciones

En particular es un grupo finito.

Nos podemos hacer la misma pregunta para el resto de los poligonos regulares

La esfera y el toro

¿Qué trasformaciones mandan la esfera (el toro) en la esfera (el toro)?

La esfera y el toro

¿Qué trasformaciones mandan la esfera (el toro) en la esfera (el toro)?
Para ambos casos podemos considerar:

- rotación respecto al eje z

La esfera y el toro

¿Qué trasformaciones mandan la esfera (el toro) en la esfera (el toro)?
Para ambos casos podemos considerar:

- rotación respecto al eje z

- En estos casos hay un número infinito de simetrías.
- Estas simetrías correspnden a la acción del círculo sobre la esfrer (o el toro).

La pregunta de interes es:
¿Determiar el grupo de difeomorfismos de la esfra que preservan volumen?

La pregunta de interes es:
¿Determiar el grupo de difeomorfismos de la esfra que preservan volumen?

Un resultado de S. Smale afirma

$$\mathrm{Diff}_{\mathrm{Vol}}(S^2) \simeq SO(3)$$

Variedades simplécticas

Una 2-forma ω es simplectica si

- $d\omega = 0$,
- es no-degenerada.

Variedades simplécticas

Una 2-forma ω es simplectica si

- $d\omega = 0$,
- es no-degenerada.

Para variedades de dimensión 2, la forma de volumen es una forma simpléctica

Variedades simplécticas

Una 2-forma ω es simplectica si

- $d\omega = 0$,
- es no-degenerada.

Para variedades de dimensión 2, la forma de volumen es una forma simpléctica
El ejemplo clasico es $\mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$,

$$\omega := dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n$$

Difeomorfismos Hamiltonianos

Tenemos (M, ω) una variedad simpléctica y $f : M \to M$ un difeomorfismo. Es Hamiltoniano si

Difeomorfismos Hamiltonianos

Tenemos (M, ω) una variedad simpléctica y $f : M \to M$ un difeomorfismo. Es Hamiltoniano si

- $f^*(\omega) = \omega$,
- existe un camino f_t tal que $f_0 = 1$, $f_1 = f$ y si

$$X_t = \frac{d}{dt} f_t$$

  entonces existe $H_t : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$\iota(X_t)\omega = dH_t.$$

Difeomorfismos Hamiltonianos

Tenemos (M, ω) una variedad simpléctica y $f : M \to M$ un difeomorfismo. Es Hamiltoniano si

- $f^*(\omega) = \omega$,
- existe un camino f_t tal que $f_0 = 1$, $f_1 = f$ y si

$$X_t = \frac{d}{dt} f_t$$

entonces existe $H_t : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$\iota(X_t)\omega = dH_t.$$

Forman un grupo denotado por $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.

Dada una variedad simpléctica (M, ω), el problema es calcular/comprender $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.

Dada una variedad simpléctica (M, ω), el problema es calcular/comprender $\text{Ham}(M, \omega)$.
Lo que se sabe de este grupo es:

- $\text{Ham}(S^2, \omega) \simeq SO(3)$. (Smale)
- $\text{Ham}(\Sigma_g, \omega) \simeq pt$ con $g \geq 1$.
- $\text{Ham}(S^2 \times S^2, \omega \oplus \lambda\omega)$ for $\lambda \geq 1$.(Gromov, McDuff, Abreu, Lalonde, etc.)
- $\text{Ham}(\mathbb{C}P^2, \omega_{FS}) \simeq PU(3)$. (Gromov)

otros más, también en dimensión 4.

Resultados que dan información parcial del grupo $\mathrm{Ham}(M, \omega)$; en particular de su grupo fundamental.

Resultados que dan información parcial del grupo $\mathrm{Ham}(M, \omega)$; en particular de su grupo fundamental.

Si (M, η) es una variedad simpléctica cerrada, entonces

$$\pi_1(\mathrm{Ham}(M \times S^2, \eta \oplus \omega))$$

tiene un elemento de orden dos inducido por $\mathrm{Ham}(S^2, \omega)$ para cualquier (M, η).

Más aun consideremos la excplosión de un punto de $(M \times S^2, \eta \oplus \omega)$. Entonces

Más aun consideremos la excplosión de un punto de $(M \times S^2, \eta \oplus \omega)$. Entonces

$$\pi_1(\mathrm{Ham}(\widetilde{M \times S^2}, \eta \oplus \omega))$$

tiene un elemento de orden infinito.

Esto es, dado k entero positivo podemos generar una variedad simpéctica (M, ω) tal que

$$\pi_1(\mathrm{Ham}(M, \omega))$$

tenga al menos rango k

Problemas

Problemas

- Determinar el tipo de homotopía de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.

Problemas

- Determinar el tipo de homotopía de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.
- Calcular $\pi_1(\mathrm{Ham}(M, \omega))$.

Problemas

- Determinar el tipo de homotopía de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.
- Calcular $\pi_1(\mathrm{Ham}(M, \omega))$.
- Dado un grupo abeliano G, existe una variedad simpléctica cerrada (M, ω) tal que $\pi_1(\mathrm{Ham}(M, \omega)) \simeq G$

Problemas

- Determinar el tipo de homotopía de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.
- Calcular $\pi_1(\mathrm{Ham}(M, \omega))$.
- Dado un grupo abeliano G, existe una variedad simpléctica cerrada (M, ω) tal que $\pi_1(\mathrm{Ham}(M, \omega)) \simeq G$
- La misma pregunta anterior, pero con $\dim M = 4$.