Aplicaciones cuasiconformes y la ecuación de Beltrami

Encuentro Nacional de Jóvenes Investigadores en Matemáticas

Victor Alberto Cruz Barriguete

Universidad Tecnológica de la Mixteca

30 de noviembre de 2015

Plan de la presentación

Introducción

Figura: L. V. Ahlfors

Matemático finlandés (1907-1996). Intrudujo el término de función cuasiconforme (1935) y es considerado el desarrollador principal de la teoría de las aplicaciones cuasiconformes en el plano. Medalla Fields en 1936.

¿Por qué se estudian las aplicaciones cuasiconformes?

1. Son la generalización natural de las funciones conformes.

¿Por qué se estudian las aplicaciones cuasiconformes?

1. Son la generalización natural de las funciones conformes.
2. Muchos teoremas sobre funciones conformes sólo utilizan la propiedad de ser cuasiconformes.

¿Por qué se estudian las aplicaciones cuasiconformes?

1. Son la generalización natural de las funciones conformes.
2. Muchos teoremas sobre funciones conformes sólo utilizan la propiedad de ser cuasiconformes.
3. Las funciones cuasiconformes son menos rígidas que las conformes.

¿Por qué se estudian las aplicaciones cuasiconformes?

1. Son la generalización natural de las funciones conformes.
2. Muchos teoremas sobre funciones conformes sólo utilizan la propiedad de ser cuasiconformes.
3. Las funciones cuasiconformes son menos rígidas que las conformes.
4. Juegan un papel muy importante en las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico.

¿Por qué se estudian las aplicaciones cuasiconformes?

1. Son la generalización natural de las funciones conformes.
2. Muchos teoremas sobre funciones conformes sólo utilizan la propiedad de ser cuasiconformes.
3. Las funciones cuasiconformes son menos rígidas que las conformes.
4. Juegan un papel muy importante en las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico.
5. Aplicación en la geometría diferencial.

¿Por qué se estudian las aplicaciones cuasiconformes?

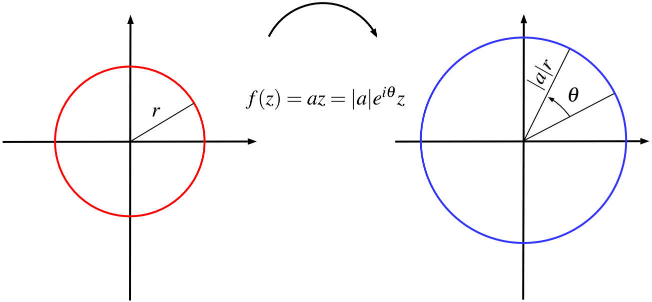
1. Son la generalización natural de las funciones conformes.
2. Muchos teoremas sobre funciones conformes sólo utilizan la propiedad de ser cuasiconformes.
3. Las funciones cuasiconformes son menos rígidas que las conformes.
4. Juegan un papel muy importante en las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico.
5. Aplicación en la geometría diferencial.
6. Su reciente aplicación en problemas aplicados.

Aplicaciones lineales sobre $\mathbb{C}$

Consideremos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Una aplicación lineal sobre $\mathbb{C}$ tiene la forma:

$$f(z) = az$$

donde $a \in \mathbb{C}$.

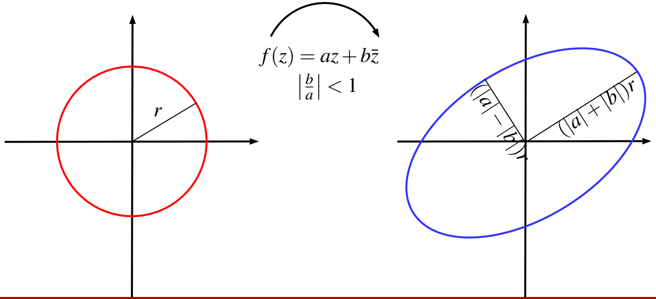


Aplicaciones lineales sobre $\mathbb{R}$

Consideremos $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Una aplicación lineal sobre $\mathbb{R}$ tiene la forma:

$$f(z) = az + b\bar{z}$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$.



Consideremos un domio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ de clase $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$.
Para $a \in \Omega$, consideramos:

Consideremos un domio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ de clase $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$.
Para $a \in \Omega$, consideramos:

- $\overline{\partial} f(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$.

Consideremos un domio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ de clase $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$. Para $a \in \Omega$, consideramos:

- $\overline{\partial} f(a) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$.
- $\partial f(a) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$.

Consideremos un domio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ de clase $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$. Para $a \in \Omega$, consideramos:

- $\overline{\partial} f(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$.
- $\partial f(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$.
- f es $\mathbb{R}$-diferenciable en a si

$$f(z) = f(a) + \partial f(a)(z-a) + \overline{\partial} f(a)\overline{(z-a)} + R(z)$$

donde $R(z) = \mathrm{o}(z-a)$.

- f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a si

$$f(z) = f(a) + \partial f(a)(z-a) + R(z)$$

donde $R(z) = \mathrm{o}(z-a)$.

- f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a si

$$f(z) = f(a) + \partial f(a)(z-a) + R(z)$$

donde $R(z) = \mathrm{o}(z-a)$.

- f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a si

$$\overline{\partial} f(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = 0.$$

- f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a si

$$f(z) = f(a) + \partial f(a)(z-a) + R(z)$$

donde $R(z) = \mathrm{o}(z-a)$.

- f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a si

$$\overline{\partial} f(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = 0.$$

- Si además $\partial f(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) \neq 0$, entonces f es **conforme** si en a.

- f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a si

$$f(z) = f(a) + \partial f(a)(z-a) + R(z)$$

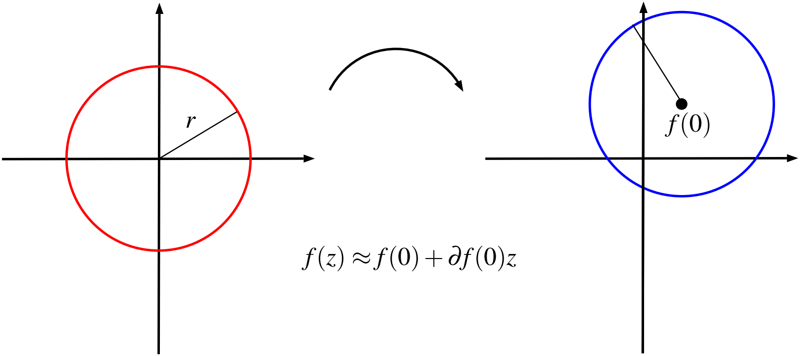
donde $R(z) = \mathrm{o}(z-a)$.

- f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a si

$$\overline{\partial} f(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = 0.$$

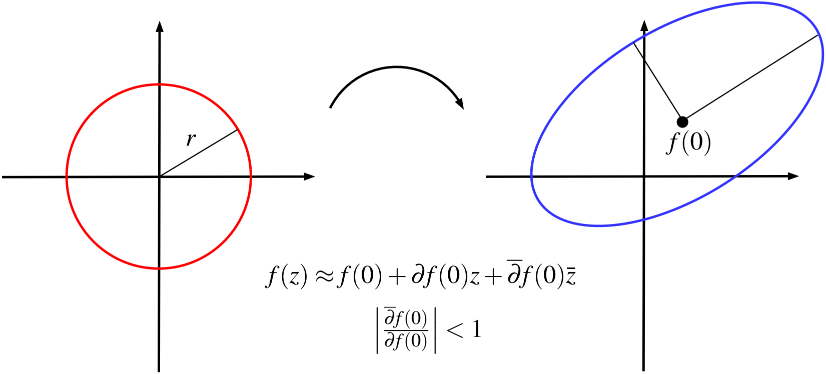
- Si además $\partial f(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) \neq 0$, entonces f es **conforme** si en a.
- f es **conforme** en Ω si lo es en cada $a \in \Omega$.

Geometría de las aplicaciones conformes



$$f(z) \approx f(0) + \partial f(0) z$$

Geometría de las aplicaciones cuasiconformes



$$f(z) \approx f(0) + \partial f(0) z + \overline{\partial} f(0) \bar{z}$$

$$\left| \frac{\overline{\partial} f(0)}{\partial f(0)} \right| < 1$$

Formulación geométrica equivale a formulación en términos de edps

Ecuación de Beltrami

Consideremos la **ecuación de Beltrami**

$$\bar{\partial} f(z) = \mu(z)\, \partial f(z) \tag{1}$$

donde μ es una función medible definida en el plano complejo $\mathbb{C}$ y tal que $\|\mu\|_\infty = k = \frac{K-1}{K+1} < 1$.

Ecuación de Beltrami

Consideremos la **ecuación de Beltrami**

$$\bar{\partial} f(z) = \mu(z)\, \partial f(z) \tag{1}$$

donde μ es una función medible definida en el plano complejo $\mathbb{C}$ y tal que $\|\mu\|_\infty = k = \frac{K-1}{K+1} < 1$.
Las soluciones de (1) que pertenecen al espacio de Sobolev $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ se llaman ***K*-cuasiregulares**. Los homeomorfismos cuasiregulares se llaman ***K*-cuasiconformes**.
Si f es cuasiconforme y $f_{\bar{z}} = 0$ para casi todo punto, entonces f es **conforme**.

Morrey (1938): Existe esencialmente una solución K-cuasiconforme.

Jr. Charles B. Morrey.
On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations.
Trans. Amer. Math. Soc., 43 (1):126–166, 1938.

Problema:

Conocer la regularidad de las soluciones cuasiregulares de la ecuación de Beltrami.

Problema:

Conocer la regularidad de las soluciones cuasiregulares de la ecuación de Beltrami.
En otras palabras,

$$\mu(z) \in X(\mathbb{C}) \Longrightarrow ¿f(z) \in ?$$

Mori (1956): Las aplicaciones cuasiregulares pertenecen a $\mathscr{C}^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{C})$ para $\alpha = \frac{1}{K}$.

Akira Mori.
On an absolute constant in the theory of quasi-conformal mappings.
J. Math. Soc. Japan, 8:156–166, 1956.

Schauder (1934): Si el coeficiente de Beltrami $\mu \in \mathscr{C}^{0,\alpha}_{loc}(\mathbb{C})$ entonces $f \in \mathscr{C}^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{C})$

J. Schauder.
Numerische abschätzungen in elliptischen differentialgleichungen.
Studia Mathematica, (5), 1934.

Ahlfors (1966): Si $p > 2$ y $\mu \in W^{1,p}(\mathbb{C})$ entonces $f \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{C})$.

Lars V. Ahlfors.
Lectures on quasiconformal mappings.
The Wadsworth & Brooks/Monterey, CA, 1987.
With the assistance of Clifford J. Earle, Jr., Reprint of the 1966 original.

Iwaniec (1992) Si $\mu \in VMO(\mathbb{C})$ con soporte compacto, entonces $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $1 < p < \infty$.

Tadeusz Iwaniec.
L^p-theory of quasiregular mappings.
In *Quasiconformal space mappings*, volume 1508 of *Lecture Notes in Math.*, pages 39–64. Springer, Berlin, 1992.

Astala (1994) Sean $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ y $p < 1 + \frac{1}{k}$. Entonces $f \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C})$.

Kari Astala.
Area distortion of quasiconformal mappings.
Acta Math., 173(1):37–60, 1994.

Clop *et al.* (2009) Si $\mu \in W^{1,2}(\mathbb{C})$ tiene soporte compacto, entonces $f \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{C})$ para todo $q < 2$.

A. Clop, D. Faraco, J. Mateu, J. Orobitg, and X. Zhong.
Beltrami equations with coefficient in the Sobolev space $W^{1,p}$.
Publ. Mat., 53(1):197–230, 2009.

Ejemplo de Vasili'ev: $\mu(z) = \frac{z}{\bar{z}} \frac{1}{2\log|z|-1} \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ pero $f(z) = z(1-\log|z|) \notin W^{2,2}_{loc}(\mathbb{C})$.

Mateu *et al.* (2009) Si $\mu \in \mathscr{C}^{0,\varepsilon}(\Omega)$ entonces la aplicación cuasiconforme $f \in \mathscr{C}^{1,\varepsilon'}(\Omega)$, donde Ω es un dominio acotado de clase $\mathscr{C}^{1,\varepsilon}$.

Joan Mateu, Joan Orobitg, and Joan Verdera.
Extra cancellation of even Calderón-Zygmund operators and quasiconformal mappings.
J. Math. Pures Appl. (9), 91(4):402–431, 2009.

Teorema [C.-Mateu-Orobitg]

Supongamos que $\mu \in A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ tiene soporte compacto con $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Entonces toda solución cuasiregular de la ecuación de Beltrami tiene primeras derivadas parciales en $A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ de manera local.

Cruz, V., Mateu, J. and Orobitg, J.
Beltrami equation with coefficient in Sobolev and Besov spaces.
Canadian Journal of Mathematics (2013) 1–19.

En nuestro caso, consideramos para $s > 0$, $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$:

$$A^s_{p,q}(\mathbb{C}) = \begin{cases} F^s_{p,q}(\mathbb{C}) & \text{Espacio de Triebel-Lizorkin} \\ B^s_{p,q}(\mathbb{C}) & \text{Espacio de Besov} \end{cases}$$

Suponiendo adicionalmente que $sp > 2$, los espacios de funciones $A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ son álgebras multiplicativas de funciones continuas.

Teorema de Factorización de Stoilow

Toda aplicación cuasiregular es la composición de una función cuasiconforme y una aplicación holomorfa. En otras palabras,

$$g(z) = H \circ f(z)$$

donde g es K-cuasiregular, H es holomorfa y f es K-cuasiconforme.

Consideremos

- **Transformada de Cauchy** de h

$$Ch(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{h(w)}{z-w}\mathrm{d}A(w)$$

Consideremos

- **Transformada de Cauchy** de h

$$Ch(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{h(w)}{z-w} \mathrm{d}A(w)$$

- **Transformada de Beurling** de h

$$Bh(z) = -\frac{1}{\pi} VP \int_{\mathbb{C}} \frac{h(w)}{(z-w)^2} \mathrm{d}A(w)$$

Consideremos

- **Transformada de Cauchy** de h

$$Ch(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{h(w)}{z-w}\mathrm{d}A(w)$$

- **Transformada de Beurling** de h

$$Bh(z) = -\frac{1}{\pi}VP\int_{\mathbb{C}} \frac{h(w)}{(z-w)^2}\mathrm{d}A(w)$$

Consideremos

- **Transformada de Cauchy** de h

$$Ch(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{h(w)}{z-w} \mathrm{d}A(w)$$

- **Transformada de Beurling** de h

$$Bh(z) = -\frac{1}{\pi} VP \int_{\mathbb{C}} \frac{h(w)}{(z-w)^2} \mathrm{d}A(w)$$

La relación entre C y B es

$$\partial C(h) = B(h).$$

Solución Principal

Cuando μ tiene soporte compacto y $|\mu| \leq k < 1$, entonces existe una única aplicación cuasiconforme normalizada por la condición $f(z) = z + O\left(\frac{1}{z}\right)$ en ∞.

La solución principal satisface las identidades

$$\begin{aligned} \partial f(z) &= 1 + B(\bar{\partial} f)(z), \\ f(z) &= z + C(\bar{\partial} f)(z). \end{aligned}$$

Proposición

Supongamos que μ tiene soporte compacto con $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ y que $f(z) = z + Ch(z)$ es la solución principal de la ecuación de Beltrami. Sean $s > 0$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ y $sp > 2$. Si $\mu \in A^s_{p,q}(\mathbb{C})$, entonces $h \in A^s_{p,q}(\mathbb{C})$.

Idea de la demostración en el caso $A^s_{p,q}(\mathbb{C})$

Consideremos la solución principal

$$f(z) = z + Ch(z)$$

Entonces, la función h satisface la ecuación funcional

$$(I - \mu B)h(z) = \mu(z)$$

Idea de la demostración en el caso $A^s_{p,q}(\mathbb{C})$

Consideremos la solución principal

$$f(z) = z + Ch(z)$$

Entonces, la función h satisface la ecuación funcional

$$(I - \mu B)h(z) = \mu(z)$$

El problema se reduce a mostrar que:

$$h(z) = (I - \mu B)^{-1}\mu(z).$$

Siguiendo el esquema de Iwaniec, definimos

$$P_m = I + \mu B + \cdots + (\mu B)^m$$

y así

$$\begin{aligned}(I - \mu B)P_{n-1} = P_{n-1}(I - \mu B) &= I - (\mu B)^n \\ &= I - \mu^n B^n + K\end{aligned}$$

donde $K = \mu^n B^n - (\mu B)^n$.

Afirmación:

$$I - \mu B \colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$$

es un operador de Fredholm.

La afirmación se sigue de:

1. $I - \mu^n B^n \colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es invertible para todo n suficientemente grande.

Afirmación:

$$I - \mu B \colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$$

es un operador de Fredholm.

La afirmación se sigue de:

1. $I - \mu^n B^n \colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es invertible para todo n suficientemente grande.
2. $K \colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es un operador compacto.

$I-\mu^n B^n: A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es invertible

Se sigue de:

1. $b_n = \dfrac{((-1)^n)}{\pi}\dfrac{\bar{z}^{n-1}}{z^{n+1}}$ es el núcleo de la iterada de la transformada de Beurling B^n

$I - \mu^n B^n : A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es invertible

Se sigue de:

1. $b_n = \frac{((-1)^n)}{\pi} \frac{\bar{z}^{n-1}}{z^{n+1}}$ es el núcleo de la iterada de la transformada de Beurling B^n
2. La constante de Calderón-Zygmund es

$$\| b_n(z)|z|^2 \|_\infty + \| \nabla b_n(z)|z|^3 \|_\infty \leq Cn^2$$

$I-\mu^n B^n: A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es invertible

Se sigue de:

1. $b_n = \frac{((-1)^n)}{\pi}\frac{\bar{z}^{n-1}}{z^{n+1}}$ es el núcleo de la iterada de la transformada de Beurling B^n
2. La constante de Calderón-Zygmund es
$$\|b_n(z)|z|^2\|_\infty + \|\nabla b_n(z)|z|^3\|_\infty \leq Cn^2$$
3. Dado que $\|g^m\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})} \leq C\|g\|_\infty^{m-1}\|g\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})}$ se tiene
$$\|\mu^n B^n(f)\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})} \leq Cn^2\|\mu\|_\infty^{n-1}\|\mu\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})}\|f\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})}.$$

$K\colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es compacto

- K es suma finita de operadores que tienen como factor al conmutator $[\mu, B]$.

$K\colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es compacto

- K es suma finita de operadores que tienen como factor al conmutator $[\mu, B]$.
- El conmutator $[\mu, B]\colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es compacto y

$$\|[\mu, B]f\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})} \leq C\|\mu\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})}\|f\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})}$$

$K\colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es compacto

- K es suma finita de operadores que tienen como factor al conmutator $[\mu, B]$.
- El conmutator $[\mu, B]\colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es compacto y

$$\|[\mu, B]f\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})} \leq C\|\mu\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})}\|f\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})}$$

- Consideramos $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_c(\mathbb{C})$ tal que $\mu_n \to \mu$, entonces

$$\|[\mu_n, B]f - [\mu, B]f\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})} \leq C\|\mu_n - \mu\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})}\|f\|_{A^s_{p,q}(\mathbb{C})} \to 0$$

- Haciendo $g = Cf$ con $f \in A^s_{p,q}(\mathbb{C})$, escribimos

$$\mu B(f) - B(\mu f) = B(\bar{\partial}\mu Cf) - \partial\mu\, Cf$$

- Haciendo $g = Cf$ con $f \in A^s_{p,q}(\mathbb{C})$, escribimos

$$\mu B(f) - B(\mu f) = B(\bar{\partial}\mu Cf) - \partial\mu\, Cf$$

- Si $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(D)$, entonces $\varphi Cf \in A^{s+1}_{p,q(\mathbb{C})}$ y usando la inclusión $A^{s+1}_{p,q}(D)$ en $A^s_{p,q}(D)$ es compacta.

- Haciendo $g = Cf$ con $f \in A^s_{p,q}(\mathbb{C})$, escribimos

$$\mu B(f) - B(\mu f) = B(\bar\partial \mu Cf) - \partial \mu\, Cf$$

- Si $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(D)$, entonces $\varphi Cf \in A^{s+1}_{p,q(\mathbb{C})}$ y usando la inclusión $A^{s+1}_{p,q}(D)$ en $A^s_{p,q}(D)$ es compacta.
- $[\mu, B] : A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es compacto.

De la expresión

$$\begin{aligned}(I-\mu B)P_{n-1} = P_{n-1}(I-\mu B) &= I-(\mu B)^n \\ &= I-\mu^n B^n + K\end{aligned}$$

Concluimos que $I-\mu B$ es de Fredholm
Afirmación:

- $I - t\mu B$ es una homotopía del operador identidad I en el operador de Beltrami $I-\mu B$ para $t \in [0,1]$.

De la expresión

$$\begin{aligned}(I-\mu B)P_{n-1} = P_{n-1}(I-\mu B) &= I-(\mu B)^n \\ &= I-\mu^n B^n + K\end{aligned}$$

Concluimos que $I-\mu B$ es de Fredholm
Afirmación:

- $I-t\mu B$ es una homotopía del operador identidad I en el operador de Beltrami $I-\mu B$ para $t\in[0,1]$.
- $\text{índice}(I) = \text{índice}(I-\mu B) = 0$
  Sea $T: X\to Y$

$$\text{índice}(T) = \dim\ker(T) - \dim\operatorname{coker}(T)$$

donde $\operatorname{coker}(T) = Y/T(X)$.

- $A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \subset L^p(\mathbb{C})$.

- $A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \subset L^p(\mathbb{C})$.
- $\mu \in A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \subset VMO(\mathbb{C})$ implica que $I - \mu B \colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ es inyectivo.

- $A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \subset L^p(\mathbb{C})$.
- $\mu \in A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \subset VMO(\mathbb{C})$ implica que $I - \mu B \colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ es inyectivo.
- $I - \mu B \colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es inyectivo.

- $A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \subset L^p(\mathbb{C})$.
- $\mu \in A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \subset VMO(\mathbb{C})$ implica que $I - \mu B\colon L^p(\mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{C})$ es inyectivo.
- $I - \mu B\colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es inyectivo.
- $I - \mu B\colon A^s_{p,q}(\mathbb{C}) \to A^s_{p,q}(\mathbb{C})$ es suprayectivo.

Otros resultados

Consideremos

$$I_1(L^{2,1}(\mathbb{C})) = \{f : \exists g \in L^{2,1}(\mathbb{C}) \quad f = I_1 * g\}$$

Proposición

Supongamos que μ tiene soporte compacto con $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ y que $f(z) = z + Ch(z)$ es la solución principal de la ecuación de Beltrami. Si $\mu \in I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$, entonces $h \in I_1(L^{2,1}(\mathbb{C}))$.

Proposición

Supongamos que μ tiene soporte compacto con $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ y que $f(z) = z + Ch(z)$ es la solución principal de la ecuación de Beltrami. Si $\mu \in I_s(L^{\frac{2}{s},1}(\mathbb{C}))$ para $0 < s < 2$, entonces $h \in I_s(L^{\frac{2}{s},1}(\mathbb{C}))$.

Dominios acotados Ω

Teorema [C.-Mateu-Orobitg]

Consideremos Ω un dominio acotado del plano con frontera de clase $\mathscr{C}^{1,\varepsilon}$ y μ es medible con soporte en $\bar{\Omega}$ que satisface $\|\mu\|_\infty = k < 1$. Si $\phi(z) = z + C(h)(z)$ es la solución principal de la ecuación de Beltrami, $1 < p < \infty$, $0 < s \geq 1$ y $sp > 2$, entonces :

1. Si $\mu \in W^{s,p}(\Omega)$ entonces $h \in W^{s,p}(\Omega)$.

Dominios acotados Ω

Teorema [C.-Mateu-Orobitg]

Consideremos Ω un dominio acotado del plano con frontera de clase $\mathscr{C}^{1,\varepsilon}$ y μ es medible con soporte en $\bar{\Omega}$ que satisface $\|\mu\|_\infty = k < 1$. Si $\phi(z) = z + C(h)(z)$ es la solución principal de la ecuación de Beltrami, $1 < p < \infty$, $0 < s \geq 1$ y $sp > 2$, entonces :

1. Si $\mu \in W^{s,p}(\Omega)$ entonces $h \in W^{s,p}(\Omega)$.
2. Si $\mu \in B^s_{p,p}(\Omega)$ entonces $h \in B^s_{p,p}(\Omega)$.

Prats (2015) Generalizaron el resultado de regularidad de las soluciones de la ecuación de Beltrami en $W^{s,p}(\Omega)$ para $s \in \mathbb{N}$.

Martí Prats.
Sobolev regularity of quasiconformal mappings on domains.
Preprint,
http://arxiv.org/abs/1507.04332

El primer obstáculo

Teorema [C.-Mateu-Orobitg]

Consideremos Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase $\mathscr{C}^{1,\varepsilon}$ y consideremos un operador T de Calderón Zygmund de tipo par.

- Si $T\chi_\Omega \in B^s_{p,p}(\Omega)$ con $0 < s < 1$, $n < sp < \infty$, entonces $T_\Omega : B^s_{p,p}(\Omega) \to B^s_{p,p}(\Omega)$.
- Si $T\chi_\Omega \in W^{s,p}(\Omega)$ con $0 < s < 1$, $n < sp < \infty$, entonces $T_\Omega : W^{s,p}(\Omega) \to W^{s,p}(\Omega)$.
- Si $T\chi_\Omega \in W^{1,p}(\Omega)$ con , $n < p < \infty$, entonces $T_\Omega : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$.

Prats y Tolsa (2015) Generalizaron el resultado de acotación de operadores truncados en $W^{s,p}(\Omega)$ para $s \in \mathbb{N}$.

Martí Prats and Xavier Tolsa.
A T(P) theorem for Sobolev spaces on domains.
J.Functional Analysis (268), (10):2946–2989, 2015.

Prats y Saksman (2015) Acotación de operadores truncados en $F^{s}_{p,q}(\Omega)$.

Martí Prats and Eero Saksman.
A T(1) theorem for fractional Sobolev spaces on domains
http://arxiv.org/abs/1507.03935

Algunos problemas

- Estudiar la invertibilidad del operador de Beltrami $I - \mu B$ en otros espacios de funciones $X(\mathbb{C})$

Algunos problemas

- Estudiar la invertibilidad del operador de Beltrami $I - \mu B$ en otros espacios de funciones $X(\mathbb{C})$
- Estudiar la invertibilidad del operador $I - \mu B$ en otros espacios de funciones $X(\Omega)$

Algunos problemas

- Estudiar la invertibilidad del operador de Beltrami $I - \mu B$ en otros espacios de funciones $X(\mathbb{C})$
- Estudiar la invertibilidad del operador $I - \mu B$ en otros espacios de funciones $X(\Omega)$
- Estudiar la invertibilidad del operador generalizado de Beltrami $I - \mu B - \nu \bar{B}$ en otros espacios de funciones $X(\mathbb{C})$ y $X(\Omega)$

- Estudiar el operador A-armónico

$$\mathscr{L}u = \mathrm{div}(A\nabla u)$$

E. g. [Iwaniec y Sbordone (1997)] Para $A \in VMO(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times n})$, si $1 < p < \infty$ y $F \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, la ecuación diferencial

$$\mathrm{div}(A\nabla u) = \mathrm{div} F$$

entonces $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

T. Iwaniec and C. Sbordone.
Riez transform and eliptic PDEs with VMO coefficients
Journal d'Analyse Mathématique
(74) (1998)

- Estudiar $R^*AR\varphi = R^*F$ donde
  $R = (R_1, \ldots, R_n)\colon L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

GRACIAS