Regularidad en espacios de Besov y Lizorkin-Triebel, de la descomposicion de Hodge sobre variedades Riemannianas con frontera

Francisco J. Torres Ayala FC-UNAM
Ma. de los Ángeles Sandoval Romero, FC-UNAM
Miguel A. Ballesteros Montero, IIMAS

ENJIM15
IMATE
30 de noviembre del 2015

Plan

Descomposición de Helmotz

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz

Teorema

Sea $\mathbb{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vectorial* C^1 *(*U *dominio acotado con frontera suave). Entonces* $\mathbb{F}$ *se puede descomponer, de manera única, como una suma de un gradiente negativo, con potencial* ϕ *y el rotacional de un potencial* a*. Es decir*

$$\mathbb{F} = -\nabla\phi + \nabla \times a$$

Solución de ecuaciones con valores en la frontera

$U \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto acotado con frontera suave:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbb{X} &= \mathbb{F}, \quad \text{en } U \\ \mathbb{X}|_{\partial U} &= 0, \quad \text{en } \partial U \end{aligned}$$

Pero

$$\mathbb{F} = -\nabla\phi + \nabla \times a$$

entonces, para tener solución, necesariamente $-\nabla\phi = 0$.

Se propone $\mathbb{X} = a + \nabla g$, con g en $C^\infty(U)$.
El problema es equivalente a :

$$(\nabla g)^{||} = -a^{||} \quad \text{y} \quad (\nabla g) \cdot \mathcal{N} = 0, \quad \text{en } \partial U$$

Y cuando desperte ...

el kernel del operador era distinto de cero

Y cuando desperte ...

el kernel del operador era distinto de cero

... pero su kernel y co-kernel eran finito dimensionales.

$$A\sigma = \eta \Rightarrow \sigma = A^{-1}\eta$$

Definición Un operador se llama esencialemte invertible si es invertible modulo operadores compactos.

Álgebra de Calkin

$$C(H) := \mathbb{B}(H)/\mathbb{K}(H).$$

$$\mathbb{B}(H) \xrightarrow{\pi} C(H)$$

A es escencialmente invertible sii $\pi(A)$ es invertible.

Teorema de Atkinson

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathbb{B}(H)$.
T es esencialmente invertible si y sólo si el rango de T es cerrado y los kerneles de T y T^* son finito dimensionales.

Teorema de Atkinson

(WRONG ATKINSON)

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathbb{B}(H)$.
T es esencialmente invertible si y sólo si el rango de T es cerrado y los kerneles de T y T^* son finito dimensionales.

Teorema de Atkinson

Frederic Valentine Atkinson

Teorema

Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathbb{B}(H)$.
T es esencialmente invertible si y sólo si el rango de T es cerrado y los kerneles de T y T^* son finito dimensionales (i.e. T es Fredholm).

Problemas con valores en la frontera

Problema con valores en la frontera en $U \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} Lu &= v, \quad \text{en } U \\ L_j u &= v_j, \quad 1 \leq j \leq l, \quad \text{en } \partial U \end{aligned}$$

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq d} \underbrace{a_\alpha(x)}_{\text{matriz } N \times N} \partial^\alpha(u)$$

$$L_j u = \sum_{|\beta| \leq d_j} \underbrace{b_\beta^{(j)}(x)}_{\text{matriz } N_j \times N} \partial^\beta(u)$$

El símbolo principal de L, se define como

$$p_L(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = d} a_\alpha(x)(\xi)^\alpha \in M_{N,N}$$

Elipticidad

- **Lopatskiĭ-Šapiro**

El problema con valores a la frontera es elíptico si

1. $p_L(x, \xi)$ es invertible sii $\xi \neq 0$.
2. Para todo x y para todo $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la transformación

$$\begin{aligned} M_{x,\tilde{\xi}} &\to \bigoplus_{j=1}^{l} \mathbb{C}^{N_j} \\ \sigma &\mapsto (p_{L_i}(x, \tilde{\xi} + ie_n\partial_s)\sigma|_{s=0})_{1\leq i\leq l} \end{aligned}$$

es biyectiva, para todo $\xi \neq 0$, donde

$$M_{x,\tilde{\xi}} = \{\sigma : p_L(x, \tilde{\xi} + ie_n\partial_s)\sigma = 0 \quad \text{y } \sigma \text{ es acotada en } \mathbb{R}^+\}$$

Elipticidad

- **Boutet de Monvel**

El problema con valores a la frontera es elíptico si

1. $p_L(x,\xi)$ es invertible sii $\xi \neq 0$.
2. Para todo x y para todo $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la transformación

$$\begin{array}{rcl} S(\mathbb{R}^+) & \mapsto & S(\mathbb{R}^+) \oplus \bigoplus_{j=1}^{l} \mathbb{C}^{N_j} \\ \sigma & \mapsto & (p_L(x,\tilde{\xi}+ie_n\partial_s)\sigma, p_{L_i}(x,\tilde{\xi}+ie_n\partial_s)\sigma|_{s=0})_{1\leq i\leq l} \end{array}$$

es biyectiva.

Teorema (Hörmander, Grubb, Rempel y Schulze)

Para el operador

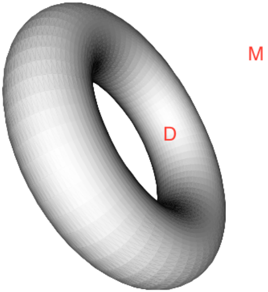
$$\begin{pmatrix} \Delta \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n}d \end{pmatrix} : W_p^s \Omega^k(D) \to \begin{matrix} W_p^{s-2}\Omega^k(D) \\ \oplus \\ W_p^{s-1/p}\Omega^k(D)|_{\partial D} \\ \oplus \\ W_p^{s-1-1/p}\Omega^{k+1}(D)|_{\partial D} \end{matrix}$$

son equivalentes:

1. *Es elíptico*
2. *Es Fredholm, para todo* $s \geq 2$, $1 < p < \infty$.

El reparto

- (M, g), variedad Riemanniana, orientada, completa con radio inyectivo positivo y geometria acotada.
- $D \subset M$, sub-variedad, compacta, conexa con frontera.



- $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, $\mathbf{t}, \mathbf{n} : \Omega^k(D) \to \Omega^k(D)|_{\partial D}$

y como estrella principal ...
El operador de Hodge

$$* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$$

Si $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ es un marco g-ortonormal (local):

$$*(E^*_{i_1} \wedge \cdots E^*_{i_k}) = \varepsilon E^*_{i'_1} \wedge \cdots \wedge E^*_{i'_{n-k}}$$

$$\begin{array}{cccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \\ i_1 & i'_1 & i_2 & i'_2 & i'_3 & i'_4 \end{array}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(1,3,2,4,5,6) = -1$$

Producto interior

$$\langle \eta, \omega \rangle := \int_M \eta \wedge *\omega$$

La co-diferencial

$$\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$$

$$\delta(\omega) = (-1)^{nk+n+1} * d * (\omega)$$

Fórmula de Green

Para $\omega \in \Omega^{k-1}(D)$, $\eta \in \Omega^k(D)$

$$\langle d\omega, \eta \rangle = \langle \omega, \delta\eta \rangle + \int_{\partial D} \mathbf{t}\omega \wedge *\mathbf{n}\eta$$

En un mundo sin fronteras ($\partial D = \emptyset$)

$$\langle d\omega, \eta \rangle = \langle \omega, \delta\eta \rangle$$

Entonces d y δ son adjuntos uno del otro.

El operador de Laplace-Beltrami

$$\Delta := d\delta + \delta d$$

- Laplaciano de Neumann:

$$\Delta_{\mathfrak{N}}^{(k)} := \begin{pmatrix} \Delta \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n}d \end{pmatrix} : \Omega^k(D) \to \Omega^k(D) \oplus \Omega^k(D)|_{\partial D} \oplus \Omega^{k+1}(D)|_{\partial D}$$

- Laplaciano de Dirichlet:

$$\Delta_{\mathfrak{D}}^{(k)} := \begin{pmatrix} \Delta \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{t}\delta \end{pmatrix} : \Omega^K(D) \to \Omega^k(D) \oplus \Omega^k(D)|_{\partial D} \oplus \Omega^{k-1}(D)|_{\partial D}$$

- Equivalentes

$$*\mathbf{n} = \mathbf{t}*, \quad *\mathbf{t} = \mathbf{n}*, \quad \mathbf{n}\delta = \delta\mathbf{n}, \quad \mathbf{t}d = d\mathbf{t}, \quad *\Delta = \Delta*$$

El operador de Laplace-Beltrami

$$s \in \mathbb{N}_0, p \geq 2$$

- Laplaciano de Neumann:

$$\Delta_{\mathfrak{N}}^{(k)} := \begin{pmatrix} \Delta \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n}d \end{pmatrix} : W_p^s \Omega^k(D) \to \begin{matrix} W_p^{s-2}\Omega^k(D) \\ \bigoplus \\ W_p^{s-1/p}\Omega^k(D)|_{\partial D} \\ \bigoplus \\ W_p^{s-1-1/p}\Omega^{k+1}(D)|_{\partial D} \end{matrix}$$

Potenciales y regularidad

$$H^k_{\mathfrak{N}}(D) = \{\omega \in H^1\Omega^k(D) : d\omega = \delta\omega = \mathbf{n}\omega = 0\}$$

Teorema

Dado $\eta \in H^k_{\mathfrak{N}}(D)^\perp$ *exsite una única* k*-forma* $\phi_{\mathfrak{N}}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{\mathfrak{N}} &= \eta, \quad \text{en } D \\ \mathbf{n}\phi_{\mathfrak{N}} &= 0, \quad \text{en } \partial D \\ \mathbf{n}d\phi_{\mathfrak{N}} &= 0, \quad \text{en } \partial D \end{aligned}$$

Además, si η *es de clase* W^s_p *entonces* $\phi_{\mathfrak{N}}$ *es de clase* W^{s+2}_p*.*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^k(D) &= \{d\alpha : \alpha \in H^1\Omega^{k-1}(D), \mathbf{t}\alpha = 0\} \\
\mathcal{C}^k(D) &= \{\delta\beta : \alpha \in H^1\Omega^{k+1}(D), \mathbf{n}\beta = 0\} \\
\mathcal{H}^k(D) &= \{\omega \in H^1\Omega^k(D) : d\omega = \delta\omega = 0\}
\end{aligned}
$$

Descomposición de Hodge

Teorema (Hodge-Morrey)

$L_2\Omega^k(D)$, se descompone, como la suma L_2-ortogonal de:

$$L_2\Omega^k(D) = \mathcal{E}^k(M) \oplus \mathcal{C}^k(M) \oplus \overline{\mathcal{H}^k(D)}$$

En W_p^s

$$\begin{aligned} W_p^s\mathcal{E}^k(D) &= \mathcal{E}^k(D) \cap W_p^s\Omega^k(D) \\ W_p^s\mathcal{C}^k(D) &= \mathcal{C}^k(D) \cap W_p^s\Omega^k(D) \\ W_p^s\mathcal{H}^k(D) &= \overline{\mathcal{H}^k(D)} \cap W_p^s\Omega^k(D) \end{aligned}$$

Teorema (Hodge-Morrey-Schwarz)

$W_p^s\Omega^k(D)$ ($s \in \mathbb{N}_0, p \geq 2$), se descompone, como la suma L_2-ortogonal de:

$$W_p^s\Omega^k(D) = W_p^s\mathcal{E}^k(M) \oplus W_p^s\mathcal{C}^k(M) \oplus W_p^s\mathcal{H}^k(D)$$

Extenciones

- Schwarz, Günter. *Hodge Decomposition-A method for Solving Boundary Value Problems.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.
- Jonhsen, Jon. *Elliptic boundary problems and the Boutet de Monvel Calulus in Besov and Triebel-Lizorkin spaces.* Math.Scand. **79**. pp. 25-28, 1996.
- Mitrea, Marius. *Sharp Hodge Decompositions, Maxwell's Equations, and vector Poisson problems on nonsmooth, three-dimensional riemannian manifolds.* Duke Math. J. **1**25, 3. pp. 467-547, 2004.
- Mitrea, Marius. *Sharp Hodge decompositions in two and three dimensional Lipschitz domains.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **334**. pp. 109-112, 2002.
- Schneider, Cornelia.*Traces in Besov and Triebel- Lizorkin spaces on domains*. Mathematische Nachrichten **284**, 5-6.pp. 572-586, 2011.
- Triebel, Hans. *Theory of Function Spaces* Vol. 1,2,3.

Era un trabajo sucio...

Teorema

$A^s_{p,q}\Omega^k(D)$ ($s > 0, 2 \leq p, q \leq \infty$, p finito para Lizorkin-Triebel), se descompone, como la suma L_2-ortogonal de:

$$A^s_{p,q}\Omega^k(D) = A^s_{p,q}\mathcal{E}^k(M) \oplus A^s_{p,q}\mathcal{C}^k(M) \oplus A^s_{p,q}\mathcal{H}^k(D)$$

$$\begin{aligned}
A^s_{p,q}\mathcal{E}^k(D) &= \mathcal{E}^k(D) \cap A^s_{p,q}\Omega^k(D) \\
A^s_{p,q}\mathcal{C}^k(D) &= \mathcal{C}^k(D) \cap A^s_{p,q}\Omega^k(D) \\
A^s_{p,q}\mathcal{H}^k(D) &= \overline{\mathcal{H}^k(D)} \cap A^s_{p,q}\Omega^k(D)
\end{aligned}$$

Espacios de Besov y Lizorkin-Triebel

Para índices, $0 < p, q \leq \infty$ y $s \in \mathbb{R}$ definimos

$$B^s_{p,q} := \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{sqk} \|(\varphi_k \hat{f})^\vee\|^q_{L_p} \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

con las moficicaciones usuales para $q = \infty$.
Para índices $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ y $s \in \mathbb{R}$ definimos

$$F^s_{p,q} := \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{sqk} \left| (\varphi_k \hat{f})^\vee(\cdot) \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p} < \infty \right\}$$

con las moficicaciones usuales para $q = \infty$.
Donde $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$, es una partición de la unidad, suave que satisface

1. $\mathrm{supp}(\varphi_0) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| \leq 2\}$,
2. para todo $j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq \|\xi\| \leq 2^{j+1}\}$,
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) = 1$, para todo x en $\mathbb{R}^n$.

Espacios de Besov y Lizorkin-Triebel

$T : D_T \subseteq H \to H$, operador lineal, no acotado, positivo, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

$$\varphi(T)f := \int_0^\infty \varphi(t) dE_f(t)$$

$$D(\varphi(T)) := \{f \in H : \int_0^\infty |\varphi(t)|^2 d\|E_f(t)\| < \infty\}$$

$$\|T^s f\| \sim \left(\sum_{j=0}^\infty 2^{2js} \|\varphi_j(T) f\|^2\right)^{1/2}$$

Regularidad

Teorema

Supongamos que $v \in W_2^2\Omega^k(D)$ *resuelve el problema de valores en la frontera*

$$\Delta v = \eta, \quad en\ U \tag{1}$$

$$\mathbf{n}v = \eta_{\mathbf{n}}, \quad en\ \partial U \tag{2}$$

$$\mathbf{n}dv = \eta_{\mathbf{n}d}, \quad en\ \partial U \tag{3}$$

para $\eta \in A^s_{pq}\Omega^k(D) \cap H^k_{\mathfrak{N}}(D)^\perp, \eta_{\mathbf{n}} \in A^s_{p,p}\Omega^k(D)|_{\partial D}, \eta_{\mathbf{n}d} \in A^{s-1-1/p}_{p,p}\Omega^{k+1}(D)|_{\partial D}$. *Entonces,* $v \in A^{s+2}_{pq}\Omega^k(D)$.

Descomposición de Friedrics

$$H^k_{\mathrm{ex}}(D) := \{\omega \in H^k(D) \mid \omega = d\alpha, \text{ para alguna } \alpha \in W^1_2\Omega^{k-1}(D)\}$$
$$H^k_{\mathrm{co}}(D) := \{\omega \in H^k(D) \mid \omega = \delta\beta, \text{ para alguna } \beta \in W^1_2\Omega^{k+1}(D)\}$$

Teorema

$$A^s_{pq}\overline{H^k(D)} = A^s_{pq}\overline{H^k_{\mathrm{ex}}(D)} \oplus H^k_{\mathfrak{N}}(D) = A^s_{pq}\overline{H^k_{\mathrm{co}}(D)} \oplus H^k_{\mathfrak{D}}(D),$$

$$A^s_{pq}H^k(D) = A^s_{pq}H^k_{\mathrm{ex}}(D) \oplus H^k_{\mathfrak{N}}(D) = A^s_{pq}H^k_{\mathrm{co}}(D) \oplus H^k_{\mathfrak{D}}(D),$$

donde la suma es ortogonal en L^2.
Los espacios $A^s_{pq}\overline{H^k_{\mathrm{ex}}(D)}$ y $A^s_{pq}\overline{H^k_{\mathrm{co}}(D)}$ son cerrados con respecto a la topología de A^s_{pq}.

GЯACIAS