La axiomatización y algebraización de la teoría de la medida en el siglo XX.

Carmen Martínez Adame

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM

1 de diciembre de 2015.

Introducción

El concepto de medida en tanto que tal surgió vinculado primordial, pero no exclusivamente con la teoría de la integración.
El descubrimiento de la existencia de algunos conjuntos densos en ninguna parte con contenido exterior positivo mostró la relevancia que las propiedades relacionadas con la medida de conjuntos podían tener y con rapidez esto llevó al surgimiento de diversas teorías de la medida.

Jordan, *Remarques sur les intégrales définies*, 1892.

Camille Jordan asegura que el papel que las funciones juegan en la integral definida es claro y ha sido bien comprendido pero considera que es necesario estudiar la influencia que los conjuntos sobre los cuales las funciones están definidas tienen sobre el valor de la integral.
Jordan muestra que a un conjunto cualquiera E le corresponden dos números determinados E' y E'' que llama su extensión interior y su extensión exterior. Si estos dos números coinciden se dirá que el conjunto E es medible.

Jordan, *Remarques sur les intégrales définies*, 1892.

Camille Jordan asegura que el papel que las funciones juegan en la integral definida es claro y ha sido bien comprendido pero considera que es necesario estudiar la influencia que los conjuntos sobre los cuales las funciones están definidas tienen sobre el valor de la integral.
Jordan muestra que a un conjunto cualquiera E le corresponden dos números determinados E' y E'' que llama su extensión interior y su extensión exterior. Si estos dos números coinciden se dirá que el conjunto E es medible.

- El proceso llevado a cabo por Jordan es constructivo.
- La extensión de un conjunto será una longitud, un área, un volumen, etc. dependiendo de la dimensión del conjunto, es decir, el concepto de extensión será de antemano una generalización de los conceptos de longitud, área, etc. ya existentes.

Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898.

Borel define la medida de un conjunto acotado E de la siguiente manera: Si E se forma a partir de todos los puntos contenidos en una infinidad numerable de intervalos ajenos entre sí y tendiendo longitud total s, se dirá que E tiene medida s.

Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898.

Borel define la medida de un conjunto acotado E de la siguiente manera: Si E se forma a partir de todos los puntos contenidos en una infinidad numerable de intervalos ajenos entre sí y tendiendo longitud total s, se dirá que E tiene medida s.
Si dos conjuntos disjuntos tienen medidas s y s', su unión tiene medida $s+s'$. En general, si se tiene una familia numerable de conjuntos disjuntos $\{E_n\}$ en [0,1], entonces la medida del conjunto $\cup_n E_n$ será $m(\cup_n E_n) = \cup_n m(E_n)$. Los conjuntos cuya medida se puede definir en virtud de las definiciones precedentes son llamados por Borel conjuntos medibles.

Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1898.

Borel define la medida de un conjunto acotado E de la siguiente manera: Si E se forma a partir de todos los puntos contenidos en una infinidad numerable de intervalos ajenos entre sí y tendiendo longitud total s, se dirá que E tiene medida s.

Si dos conjuntos disjuntos tienen medidas s y s', su unión tiene medida $s+s'$.

En general, si se tiene una familia numerable de conjuntos disjuntos $\{E_n\}$ en [0,1], entonces la medida del conjunto $\cup_n E_n$ será $m(\cup_n E_n) = \cup_n m(E_n)$.

Los conjuntos cuya medida se puede definir en virtud de las definiciones precedentes son llamados por Borel conjuntos medibles.

Borel argumenta a favor de la medida que ha definido (frente a una medida que se defina sobre una clase de conjuntos más grande) diciendo que es crucial que una medida tenga las propiedades fundamentales que él ha definido.

En otras palabras, es esencial darse cuenta de que una medida no puede ser útil si no posee ciertas propiedades, que en este caso han sido postuladas a priori y es a partir de éstas que se obtiene la clase de conjuntos medibles.

Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire*, 1902.

El objetivo de la tesis doctoral de Lebesgue es el de dar definiciones precisas a la integral definida, la longitud de curva y el área de una superficie.

Lo primero que hace Lebesgue para lograr su objetivo es introducir una teoría de la medida (que resultará distinta de la de Jordan y la de Borel) y para hacer esto formula el problema de la medida:

Problema de la Medida

Nos proponemos asignar a cada conjunto acotado un número positivo o nulo que llamaremos su medida y que cumplirá las siguientes condiciones:
1. Existen conjuntos cuya medida no es nula.
2. Dos conjuntos iguales (congruentes) tienen la misma medida.
3. La medida de la suma de un número finito o de una infinidad numerable de conjuntos ajenos entre sí es la suma de las medidas de estos conjuntos.

No resolveremos el problema de la medida sino para los conjuntos que llamaremos medibles.

El proceso llevado a cabo por Lebesgue para construir su medida depende de la introducción de los conceptos de medida exterior y medida interior. Los conjuntos cuya medida exterior e interior sean iguales se llamarán conjuntos medibles.

El proceso llevado a cabo por Lebesgue para construir su medida depende de la introducción de los conceptos de medida exterior y medida interior. Los conjuntos cuya medida exterior e interior sean iguales se llamarán conjuntos medibles.

Con base en el conjunto de Cantor Lebesgue muestra que la potencia del conjunto de los conjuntos medibles es igual a la potencia del conjunto potencia de $\mathbb{R}$ mientras que la potencia del conjunto de los conjuntos Borel medibles es la potencia de $\mathbb{R}$ y que por tanto existen conjuntos medibles que no son Borel medibles.

El proceso llevado a cabo por Lebesgue para construir su medida depende de la introducción de los conceptos de medida exterior y medida interior.
Los conjuntos cuya medida exterior e interior sean iguales se llamarán conjuntos medibles.
Con base en el conjunto de Cantor Lebesgue muestra que la potencia del conjunto de los conjuntos medibles es igual a la potencia del conjunto potencia de $\mathbb{R}$ mientras que la potencia del conjunto de los conjuntos Borel medibles es la potencia de $\mathbb{R}$ y que por tanto existen conjuntos medibles que no son Borel medibles.
Lebesgue no aborda el tema de la existencia de conjuntos no medibles en lo absoluto, su trato con este problema se limita a la siguiente frase: "No se ha demostrado que el problema de la medida sea imposible para los conjuntos (si es que existen) cuyas medidas interiores y exteriores sean desiguales. Pero en lo que sigue sólo encontraremos conjuntos medibles."

Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, 1905.

Vitali muestra que existe un conjunto que no es susceptible de ser medido con la medida de Lebesgue. De hecho lo que Vitali muestra es que si se usa el axioma de elección (que había sido enunciado por Zermelo de manera explícita por primera vez un año antes) no existe una medida real, no negativa, definida sobre todos los conjuntos acotados, que sea invariante bajo traslaciones, numerablemente aditiva y tal que el intervalo unitario tenga medida 1. O en palabras de Vitali: "el problema de la medida de grupos de puntos de una recta es imposible [...] nuestro resultado significa que la posibilidad del problema de la medida de grupos de puntos de una recta y aquella de bien ordenar el continuo no pueden coexistir."

Dado que la demostración de Vitali recurre al axioma de elección la demostración no fue bienvenida por Lebesgue quien se oponía, junto con Borel, al uso del axioma. Por otra parte para matemáticos como Hausdorff (entre otros), quienes no se oponían al uso del axioma, la demostración no sólo era válida sino que matemáticamente correcta y en 1914 Hausdorff muestra que el problema de la medida planteado por Lebesgue tampoco tiene solución en el espacio $n-$dimensional (con $n \geq 3$).

Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914.

Para hacer esto Hausdorff se plantea la siguiente pregunta que se conoce como el problema amplio de la medida: ¿Es posible asignar a cada conjunto acotado E de un espacio de n dimensiones un número $m(E)$ que satisfaga las condiciones siguientes?

1. $m(E) \geq 0$.
2. $m(E_0) = 1$ para algún conjunto E_0 del espacio considerado.
3. $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ si E_1 y E_2 son disjuntos.
4. $m(E_1) = m(E_2)$ si los conjuntos E_1 yE_2 son superponibles.

Lo que Hausdorff demuestra (con ayuda del axioma de elección) es que existe una descomposición de la superficie de una esfera en cuatro conjuntos, A, B, C y Q tales que Q es numerable, $A \cong B \cong C$ y $A \cong B \cup C$. Por tanto, si existiera una medida que cumpla las condiciones 1 a 4, se tendría que la medida de Q es nula y que $m(A) = m(B) = m(C)$ y $m(A) = m(B \cup C)$ lo cual es evidentemente una contradicción.

Este trabajo realizado por Hausdorff que se pregunta por la existencia de una medida, junto con el trabajo realizado por Carathéodory entre 1914 y 1918 permitió, desde nuestro punto de vista, un gran desarrollo en la teoría de la medida; pues vale la pena recalcar que para Lebesgue la medida era una generalización del concepto de longitud en la recta y que difícilmente se podría concebir una medida en un sentido más general puesto que el papel que Lebesgue le había atribuido era precisamente ese y se encontraba subordinado al de la teoría de la integración. Carathéodory tenía otro punto de vista.

Carathéodory

Carathéodory, al llegar a Göttingen en 1913 cambió la dirección principal de su trabajo de investigación y comenzó el estudio de funciones de variable real. Este estudio tenía como fundamento la teoría creada a partir de la introducción de la teoría de la integración de Lebesgue y fue en 1914 que Carathéodory presentó su teoría formal de la medida en el artículo *Über das lineare Mass von Punktmengen – eine Verallgemeinerung des Längenbegriffes*. Este artículo comienza diciendo:

Me pareció apropiado comenzar mi presentación con una teoría puramente formal de la medida. Se anuncia una definición fundamental de la medida que es más general que la usual ya que se aplica a conjuntos de puntos con medida exterior infinita [...] Por tanto esta definición es mucho más conveniente que la vieja [...] y es completamente equivalente.

Carathéodory define una medida $m-$dimensional para subconjuntos del espacio euclidiano $q-$dimensional tal que para $m = 1$ se obtiene la medida lineal y para $m = q$ la medida de Lebesgue. Para hacer esto Carathéodory define una medida exterior a través de cinco propiedades básicas que en realidad juegan el papel de axiomas en su teoría. Estas son las siguientes:

1. Un único número $\mu^*(A) \in [0, \infty]$, llamado la medida exterior de A, es asignado a cada conjunto de puntos de $\mathbb{R}^q$.

1. Un único número $\mu^*(A) \in [0, \infty]$, llamado la medida exterior de A, es asignado a cada conjunto de puntos de $\mathbb{R}^q$.
2. Si $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^q$ entonces

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A).$$

1. Un único número $\mu^*(A) \in [0, \infty]$, llamado la medida exterior de A, es asignado a cada conjunto de puntos de $\mathbb{R}^q$.
2. Si $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^q$ entonces

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A).$$

3. Si A es la unión de una sucesión numerable de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ contenidos en $\mathbb{R}^q$, entonces

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \ldots.$$

1. Un único número $\mu^*(A) \in [0, \infty]$, llamado la medida exterior de A, es asignado a cada conjunto de puntos de $\mathbb{R}^q$.
2. Si $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^q$ entonces
$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A).$$
3. Si A es la unión de una sucesión numerable de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ contenidos en $\mathbb{R}^q$, entonces
$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \ldots.$$
4. Si A_1 y A_2 son dos conjuntos en $\mathbb{R}^q$ y la distancia entre ellos es positiva, entonces
$$\mu^*(A_1 + A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

1. Un único número $\mu^*(A) \in [0, \infty]$, llamado la medida exterior de A, es asignado a cada conjunto de puntos de $\mathbb{R}^q$.
2. Si $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^q$ entonces

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A).$$

3. Si A es la unión de una sucesión numerable de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ contenidos en $\mathbb{R}^q$, entonces

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \ldots.$$

4. Si A_1 y A_2 son dos conjuntos en $\mathbb{R}^q$ y la distancia entre ellos es positiva, entonces

$$\mu^*(A_1 + A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

5. La medida exterior $\mu^*(A)$ de cualquier conjunto A en $\mathbb{R}^q$ es el ínfimo de $\mu(B)$ tomado sobre todos los B medibles que contengan a A.

Después de los primeros tres axiomas Carathéodory presenta la definición de conjunto medible:

Un conjunto A es llamado medible si para cada subconjunto W

$$\mu^*(W) = \mu^*(A \cap W) + \mu^*(W - A \cap W).$$

La medida $\mu(A)$ de A se define mediante la ecuación $\mu(A) = \mu^*(A)$.

En agosto de 1914 Carathéodory comenzó a escribir su libro *Vorlesungen über reelle Funktionen* que aunque apareció publicado en 1918 según una nota del propio Carathéodory se terminó de escribir en noviembre de 1915. En el prefacio de su obra Carathéodory señala que consultó las obras de de la Vallée Poussin, Jordan, Baire, Hausdorff, Lindelöf, Young y Lebesgue. El libro de Carathéodory fue recibido como la culminación del desarrollo comenzado a la vuelta del siglo por Lebesgue y Borel y como el comienzo de la axiomatización moderna de esta rama de las matemáticas.
El propio Carathéodory describió su libro de la siguiente manera en una carta a Féjer fechada el 2 de julio de 1916:

He utilizado el pasado año para escribir un libro (que desafortunadamente es muy grueso) sobre las funciones reales que se está imprimiendo ahora. No es una gran azaña pero creo que será de utilidad ya que la teoría de integración de Lebesgue se presentará de manera fácilmente entendible por primera vez.

He utilizado el pasado año para escribir un libro (que desafortunadamente es muy grueso) sobre las funciones reales que se está imprimiendo ahora. No es una gran azaña pero creo que será de utilidad ya que la teoría de integración de Lebesgue se presentará de manera fácilmente entendible por primera vez. En la introducción al texto Carathéodory dice que la revolución que la teoría de funciones de variable real sufrió como resultado de las investigaciones de Lebesgue constituye un evento que hoy puede ser considerado básicamente como completo. Por tanto un intento de reconstruir sistemáticamente a la teoría desde sus fundamentos parece obligatorio.

En este texto Carathéodory define a la medida exterior $\mu^*(A)$ como el ínfimo de las sumas (finitas o numerables) de los volúmenes q-dimensionales de los *intervalos* que cubren a A. Observa también que este es un caso particular de la noción general dada por los axiomas 1-4 que ya mencionamos.
Carathéodory incluye en su libro otro ejemplo medida:

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ si } a \notin A \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}^q$ es fijo y $A \subseteq \mathbb{R}^q$.

En el caso de la teoría de Lebesgue (así como la de sus predecesores) la medida en cuestión era una *única* medida −la que generalizaba los conceptos de longitud, área, volumen, etc.− y con la inclusión de este ejemplo, el objetivo de la teoría se vuelve estudiar las medidas y no los conjuntos sobre los cuales están definidos estas medidas.

De esta manera la teoría de la medida devino una teoría general y abstracta; si bien desde Borel la teoría de la medida se había presentado de manera axiomática es sólo con este paso que deviene una teoría con objetos propios.

Ahora bien, habiendo ya puntualizado la importancia de los aportes hechos por el libro de Carathéodory, es relevante notar que dicho libro se reimprimió en 1927 y poco tiempo después Teubner le pidió una reimpresión más, sin embargo Carathéodory sintió que para entonces la teoría de funciones reales ya había cambiado mucho desde 1918 y decidió modificar sustancialmente su libro para dar cuenta de ello. En particular quería dar cuenta de los espacios abstractos introducidos en un primer momento por Fréchet. La noción de integral ya había sido extendida también a estos espacios y así la teoría de Lebesgue que había constituido el tema central del libro de Carathéodory debía ser incorporada a estas teorías más generales. Carathéodory decidió tomar todo esto en cuenta para preparar la tercera edición de su texto.

Sin embargo, al empezar a trabajar sobre esto Carathéodory se dio cuenta de que estas generalizaciones se podían llevar aún más lejos ya que lo que era realmente importante no eran las propiedades de los elementos sobre los cuales se extendería la integración sino las propiedades que uno pediría de la integración misma. De esta manera surgió una nueva serie de obras de Carathéodory:

1. *Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs* en 1938
2. *Bemerkungen zur Axiomatik der Somentheorie* en 1938
3. *Die Homomorphien von Somen und die Multiplikation von Inhaltsfunktionen* en 1939
4. *Über die Differentiation von Massfunktionen* en 1940
5. *Bemerkungen zum Riesz-Fischerschen Satz und zur Ergodentheorie* en 1941
6. *Gepaarte Mengen, Verbände, Somenringe* en 1942
7. *Bemerkungen zum Ergodensatz von G. Birkhoff* en 1944.

Para incluir las ideas que comenzaron a desarrollarse en estas obras Carathéodory decidió reescribir su texto original en tres volúmenes. El primero de ellos, *Reelle Funktionen, Bd. I, Zahlen, Punktmengen Funktionen* se publicó en 1939 y contenía el material de su libro hasta antes de llegar al concepto de medida y contenido.

La publicación, en 1938, de *Entwurf fur eine Algebraisierung des Integralbegriffs*, marcó el inicio de una nueva axiomatización de la teoría de la medida.

De los dos volúmenes pendientes sobre la Teoría de Funciones Reales, los cuales habían sido anunciados por Carathéodory formalmente en el prefacio de *Reelle Funktionen I*, se suponía que el segundo debía aparecer en 1943, sin embargo, la casa editorial de Teubner fue destruida durante el bombardeo de Leipzig y Carathéodory decidió volver a revisar el material del libro.

En marzo de 1949 anunció su publicación a Born en una carta fechada el 24 de marzo: "También tengo otro libro sobre medida e integral en espacios booleanos. Ya se había publicado pero fue destruido por un incendio en Leipzig en 1943. Ya lo he reescrito. Será publicado por Birkhäuser." Después de la guerra Carathéodory revisó en material de lo que serían el segundo y tercer volumen y decidió cambiar de planes y escribir un único volumen que fuese autocontenido y dedicado al material que ya había escrito. Sin embargo, Carathéodory falleció un año después, el 2 de febrero de 1950, y fueron Rosenthal, Steuerwald y Finsler quienes editaron y publicaron su última obra *Mass und Integral und ihre Algebraisierung* que apareció publicada por Birkhäuser en 1956.

Este texto presenta una exposición unificada y sistemática de la teoría general que Carathéodory comenzó a desarrollar en 1938. Las nociones que Carathéodory presenta están hechas ad hoc para el establecimiento de una teoría general de la medida, es decir, una que contenga como casos particulares no sólo a la teoría euclidiana sino también a la teoría de la medida desarrollada en el Siglo XX.
Para lograr esta unificación fue necesaria la introducción de nuevos objetos; éstos gozarán tanto de las propiedades que tienen los conjuntos con elementos arbitrarios como las figuras de la geometría elemental que no pueden ser tratadas como conjuntos de puntos. Estos objetos serán llamados *somas*. Los somas fueron introducidos por primera vez por Carathéodory en *Entwurf fur eine Algebraisierung des Integralbegriffs* mediante una definición axiomática.

Ahora bien, para poder estudiar la teoría final publicada en 1956 presentaremos los axiomas que Carathéodory presenta en los textos de 1938:
Los axiomas en 1938a son los siguientes:

Axioma 1 (1938a) Todos los somas $A, B\dots$ forman un conjunto $\mathfrak{M}$. Para cualesquiera dos somas siempre se puede saber si $A = B$ o si $A \neq B$. Aquí el signo de igualdad expresa a cualquier relación que cumpla con las condiciones $A = A$, si $A = B$ entonces $B = A$ y si $A = B$ y $B = C$ entonces $A = C$.

Axioma 2 (1938a) A cada par de somas A, B le será claramente asignado un tercer soma $A \dotplus B$ que se llamará la unión de A y B. Para la unión se aplicarán las siguientes reglas:

$$A \dotplus A = A$$

$$A \dotplus B = B \dotplus A$$

$$A \dotplus (B \dotplus C) = (A \dotplus B) \dotplus C$$

y

$$B = B' \text{ implica que } A \dotplus B = A \dotplus B'.$$

Después de este segundo axioma Carathéodory define lo que significa que un soma sea *parte* de otro: $B \subseteq A$ si $A \dotplus B = A$ y con base en esto introduce el tercer axioma.

Axioma 3 (1938a) Dada una sucesión numerable de somas $A_1, A_2, \ldots$ existe un mínimo soma V que los contiene a todos. Este soma será llamado su unión y se escribirá $V = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots$.

Axioma 4 (1938a) Hay por lo menos un soma O, el soma vacío, que es parte de todos los somas.

A partir de este último axioma se puede definir el que dos somas sean ajenos entre sí si el único soma que forma parte de ambos es el soma vacío. En este caso se escribirá $A \circ B$.

Axioma 5 (1938a) Si un soma B es ajeno de todos los somas de la sucesión $A_1, A_2, \ldots$, entonces también es ajeno de su unión $V = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots$.

Finalmente, el axioma 6 define la diferencia de dos conjuntos de la siguiente manera:

Axioma 6 (1938a) Si A y B son cualesquiera dos somas, siempre hay por lo menos un soma B_1 que cumple las siguientes condiciones de forma simultánea:

$$B_1 \circ A$$

$$B_1 \dot{+} B = B$$

y

$$B_1 \dot{+} A = B \dot{+} A.$$

En 1938b, escrito unos meses después, Carathéodory dedica la sexta sección del artículo, que en realidad es muy corto (9 páginas), a “Los axiomas de la teoría de somas” que son distintos a los que acabamos de presentar.

En 1938b, escrito unos meses después, Carathéodory dedica la sexta sección del artículo, que en realidad es muy corto (9 páginas), a “Los axiomas de la teoría de somas” que son distintos a los que acabamos de presentar.
Define un conjunto $\mathfrak{M}_0$ cuyos elementos serán los somas $A, B, \ldots$ de la teoría. Después define lo que significa que un soma “esté contenido: $\subseteq$” en otro y con base en esto demuestra el siguiente teorema:
Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$.
Este es el primer punto que llama nuestra atención al comparar los dos textos de 1938 puesto que en el primero la igualdad de somas se define a través del símbolo $=$ al cual lo único que se le pide es que sea una relación de equivalencia. Aquí la igualdad de somas se deriva de la definición de contención.

Después de presentar este teorema Carathéodory enuncia los axiomas. El primero de ellos se anuncia diciendo que “la existencia de la unión de somas está determinada por el siguiente axioma”:

Axioma 1 (1938b) Dada una sucesión finita o infinita de somas $A_1, A_2, \ldots$ existe un soma V tal que $A_j \subseteq V$ para toda j y tal que si para algún soma B se tiene que $A_j \subseteq B$ para toda j, entonces $V \subseteq B$.

A partir de este axioma se define la unión de los somas $A_1, A_2, \ldots$ diciendo que ésta será el soma V.
El segundo axioma se presenta después de dos teoremas relativos a la unión y garantiza la existencia del soma vacío:

Axioma 2 (1938b) Hay por lo menos un soma O, el soma vacío, que es parte de cualquier soma.

Con base en esto se define lo que significa que dos conjuntos sean disjuntos y finalmente los axiomas 3 y 4 coinciden con los axiomas 5 y 6 del artículo anterior.

1956

El prefacio del texto de 1956 comienza de la siguiente manera:
George Boole (1815-1862), en su famoso libro *Laws of Thought* publicado en 1854, desarrolló un simbolismo que hoy lleva el nombre de álgebra booleana. El ejemplo más simple de una tal álgebra es el obtenido al aplicar a conjuntos las operaciones de formar uniones, intersecciones y diferencias (o pasar de un conjunto a su complemento.
Es claro a partir de esto que la teoría de la medida, que puede ser desarrollada incluso para conjuntos con elementos arbitrarios, no tiene porque perder su significado para anillos de elementos de un álgebra booleana.
Hace aproximadamente diez años me di cuenta de que también es posible construir lo análogo a funciones de puntos ordinarias sobre anillos booleanos, lo que hace posible la algebraización de la integral.

Es importante notar que este objetivo para Carathéodory no es únicamente de interés teórico sino que los teoremas y métodos de prueba que serán desarrollados muestran relaciones que de otra manera hubieran permanecido en la oscuridad. Además estas relaciones conducen a un desarrollo de la teoría que Carathéodory caracteriza como "orgánico, altamente elemental y unificado". Es en este contexto que el concepto de soma es retomado.

El primer capítulo está dedicado precisamente a los somas pero comienza con una breve exposición del método axiomático y anuncia que su intención es la de tratar a las teorías de la medida e integración bajo este método. Esta es la ocasión para presentar un nuevo conjunto de axiomas para los somas y se aclara que la totalidad de somas que ocurran en cualquier problema dado será siempre un conjunto que se denotará en general por $\mathfrak{M}_0$.

Axioma 1 Sea $\mathfrak{M}_0$ un conjunto no vacío de somas. A cada pareja A, B de somas de $\mathfrak{M}_0$ le será asignado un tercer soma de $\mathfrak{M}_0$, denotado por $A \dot{+} B$, llamado la *conjunción* de A y B. Esta operación satisface que

$$
\begin{aligned}
A \dot{+} B &= B \dot{+} A \\
A \dot{+} \left(B \dot{+} C\right) &= \left(A \dot{+} B\right) \dot{+} C.
\end{aligned}
$$

En donde el signo de igualdad indica que los dos somas son idénticos, es decir, que los símbolos de ambos lados denotan a uno y el mismo soma. Además para cualquier pareja A, B siempre existe un tercer soma X de $\mathfrak{M}_0$ talque $A \dot{+} X = B$.

La operación $A \underset{\cdot}{+} B$ hace que $\mathfrak{M}_0$ sea un grupo abeliano.

Existe un único soma O, que se llamará el soma vacío, tal que $X \underset{\cdot}{+} O = X$ para todo X en $\mathfrak{M}_0$. Además, la ecuación $A \underset{\cdot}{+} X = A$ tiene, para cualquier A arbitrario, una única solución $X = O$.

Después de la demostración de este teorema Carathéodory introduce el siguiente axioma.

Axioma 2 A cada pareja A, B de somas de $\mathfrak{M}_0$ —en ese orden— le será asignado un único soma de $\mathfrak{M}_0$ denotado por AB.
Para cualesquiera tres somas A, B, C se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C \\ (A \underset{\cdot}{+} B)C &= AC \underset{\cdot}{+} BC \\ C(A \underset{\cdot}{+} B) &= CA \underset{\cdot}{+} CB. \end{aligned}$$

Ahora bien, cualquier sistema de somas $A, B, \ldots$ para el cual se cumplan los axiomas 1 y 2 es un anillo. Carathéodory hace notar que no es un anillo conmutativo, sin embargo lo que sí se cumple es $AO = OA = O$ para cualquier $A \in \mathfrak{M}_0$.

Axioma 3. Todo soma A satisface

$$AA = A.$$

A partir de este tercer axioma se puede demostrar que la operación definida en el axioma 2 sí es conmutativa.
Para cualesquiera dos somas A, B se tiene que

$$\begin{aligned} AB &= BA \\ AO &= O \\ A \underset{\cdot}{+} A &= O. \end{aligned}$$

Y es a partir de este teorema que el soma $AB = BA$ será llamado la *intersección* de A y B.

Antes de introducir el cuarto y último axioma, Carathéodory introduce las siguiente definiciones:
Un soma A es llamado subsoma de un soma B si $AB = A$, se escribirá $A \subseteq B$.
Un conjunto $\mathfrak{M}_0$ está parcialmente ordenado si una relación $A \subseteq B$ está definida para ciertos pares de elementos A, B de $\mathfrak{M}_0$ de manera que $A \subseteq A$ para todo $A \in \mathfrak{M}_0$ y si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
Y a partir de estas definiciones enuncia el siguiente teorema:
Cualesquiera dos somas A y B tienen un único mínimo soma que los contiene llamado su unión denotado por $A \dot{+} B$ y que está dado por:

$$A \dot{+} B = A \underset{\cdot}{+} B \underset{\cdot}{+} AB.$$

La noción de unión se puede extender a colecciones infinitas:
Decimos que $V = \sum_{A\in\mathfrak{A}} \dot{+} A$ es la unión de los somas A en un conjunto $\mathfrak{A}$ de somas si V satisface las siguiente dos condiciones:

1. si $A \in \mathfrak{A}$ entonces $A \subseteq V$
2. si $A \subseteq W$ para todo $A \in \mathfrak{A}$ entonces $V \subseteq W$.

Estas dos condiciones de la definición garantizan que si una unión de somas existe entonces es única y se puede mostrar que la unión de una cantidad finita de somas siempre existe, sin embargo el que exista la unión de una cantidad numerable de somas tiene que postularse:

Axioma 4. Para toda sucesión $A_1, A_2, \ldots$ numerable de somas existe un mínimo soma que la contiene y se llama su unión:

$$A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \ldots \text{ o } \sum_j \dot{+} A_j.$$

El enunciado de este axioma no se sigue de los anteriores y es importante notar que tampoco implica que siempre exista la unión de una colección arbitraria de somas. Para mostrar esto Carathéodory toma como somas los conjuntos de medida de Lebesgue cero en $\mathbb{R}$; los conjuntos formados de un solo punto del intervalo [0,1] constituyen un conjunto de somas pero su unión (todo el intervalo) no es uno de lo somas puesto que no tiene medida cero.

Con estos axiomas se desarrolla la teoría algebraica de los somas para introducir el concepto de funciones de somas y posteriormente el concepto de función medible:

Un soma U en el dominio de definición $\mathfrak{A}$ de una función $F(X)$ es F-medible si para todo soma A que, junto con AU y $A \underset{\cdot}{+} AU$ pertenecen a $\mathfrak{A}$, y tal que $F(A)$, $F(AU)$ y $F(A \underset{\cdot}{+} AU)$ son cantidades finitas, siempre se cumple la siguiente igualdad:

$$F(A) = F(AU) + F(A \underset{\cdot}{+} AU).$$

Antes de introducir el concepto de medida Carathéodory necesita las siguientes definiciones:

Un anillo de somas que es numerablemente aditivo es llamado un anillo completo.

Un conjunto de somas $\mathfrak{A}$ es aditivo si la unión de cualesquiera dos somas en $\mathfrak{A}$ también es un elemento de $\mathfrak{A}$. Análogamente un conjunto de somas es multiplicativo si la intersección de cualesquiera dos somas en $\mathfrak{A}$ también es un elemento de $\mathfrak{A}$; un conjunto de somas es conjuntivo si la conjunción de cualesquiera dos somas en $\mathfrak{A}$ también es un elemento de $\mathfrak{A}$ y finalmente un conjunto de somas es sustractivo si para cualesquier dos somas A y B en él, se tiene que $A - AB$ también es un elemento.

Un conjunto de somas $\mathfrak{B}$ es hereditario si todo subsoma de un soma de $\mathfrak{B}$ es un soma de $\mathfrak{B}$; es decir, si $X \subseteq B$ y $B \in \mathfrak{B}$ entonces $X \in \mathfrak{B}$.

Dados dos conjuntos de somas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, se dice que $\mathfrak{B}$ es hereditario con respecto a $\mathfrak{A}$ o $\mathfrak{A}$-hereditario si todo soma de $\mathfrak{A}$ que sea un subsoma de un soma de $\mathfrak{B}$ es él mismo un soma de $\mathfrak{B}$; es decir si $X \subseteq B$ y $X \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ entonces $X \in \mathfrak{B}$.

Finalmente, Carathéodory llega al punto crucial para el cual se ha desarrollado toda la teoría previa, el de medida:

Una función $\varphi(X)$ es llamada una función de medida siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Su dominio de definición $\mathfrak{A}$ es un anillo completo.
2. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión numerable de somas de $\mathfrak{A}$ y B es cualquier otro soma de $\mathfrak{A}$ tal que $B \subseteq A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots$, entonces

$$\varphi(B) \leq \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \ldots$$

3. Para el soma O se tiene que $\varphi(O) = 0$.

A partir de estas condiciones se puede mostrar que $\varphi(X)$ es no negativa para todo soma X.

Esta definición en la cual es fácil de reconocer tanto el concepto de medida de Lebesgue como el concepto moderno de medida ha sido construida por Carathéodory de manera axiomática partiendo de nuevos objetos de manera que la noción de medida ha devenido una noción puramente algebraica que puede ser aplicada a elementos de cualquier algebra booleana.

Esto a su vez permite la introducción de una teoría de la integración con la cual culmina su teoría y en la cual se define a la integral mediante el siguiente teorema:

Sea $\varphi(X)$ una función de medida y sea f una función no negativa y φ-medible cuyo dominio de definición es un soma M que a su vez es φ-medible. Entonces existe una única función de medida $\psi(X)$ que es absolutamente continua con respecto a $\varphi(X)$, que está definida para todos los subsomas de M y que satisface que $\alpha(A)\varphi(A) \leq \psi(A) \leq \beta(A)\varphi(A)$ para todos los subsomas A de M tales que $0 < \varphi(A) < \infty$ y en donde $\alpha(A)$ y $\beta(A)$ denotan al ínfimo y supremo de f en A respectivamente.

La función de medida $\psi(X)$ es llamada la integral de f en X para la función $\varphi(X)$ y es denotada por $\psi(X) = \int_X f d\varphi$.

Esta teoría de integración tiene como caso particular la integral de Lebesgue.

¡GRACIAS!