Cálculo II

Entregar martes 2 de abril por equipos de 3 a 5 integrantes.

1. Cuando se aproxima una integral definida por sumas de Riemann utilizando el punto medio de cada intervalo se llama a esta aproximación la regla del punto medio. Utiliza la regla del punto medio, considerando una partición en n subintervalos iguales, para las siguientes integrales:
   a) $\int_1^3 \frac{1}{x} dx, n = 5$; b) $\int_0^1 e^{-x^2} dx, n = 6$; $\frac{1}{2}\int_1^3 x^2; n = 2, 5$.

2. Escribe las sumas superior e inferior para cada una de las siguientes funciones en el intervalo indicado:. Utiliza una partición donde cada subintervalo tenga longitud $1/n$ para $n = 2, 3, 4$:
   a) $f(x) = x^2 + 3$, en $[1, 3]$ b) $f(x) = \sqrt{x}$, en $[2, 5]$ c) $f(x) = 1/x$, en $[1, 4]$.

3. Demuestra que una función creciente o decreciente en un intervalo cerrado, es integrable.

4. Supongamos que f es integrable en $[-b, b]$. Demuestra que si f es par $\int_{-b}^{b} f(x)dx = 2\int_0^b f(x)dx$ y que si f es impar $\int_{-b}^{b} f(x)dx = 0$.

5. Supón que f y g son continuas y que $\int_1^2 f(x)dx = -4, \int_1^5 f(x)dx = 6, \int_1^5 g(x)dx = 8$. Utilizando propiedades de la integral definida encuentra:
   a) $\int_2^2 g(x)dx$ b) $\int_5^1 g(x)dx$ c) $\int_1^2 3f(x)dx$ d) $\int_2^5 f(x)dx$ e)$\int_1^5 [2f(x) - 3g(x)]dx$.

6. Encuentra dy/dx, donde
   a) $y = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}dt$ b) $y = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$
   c) $y = \int_x^4 \sqrt{7 + t^4}dt$ d) $y = \int_1^x \frac{1}{t}dt, x > 0$
   e)$y = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable en todo intervalo de la forma $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que si $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ y $\int_0^{\infty} f(x)dx$ son convergentes, entonces $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ y $\int_a^{\infty} f(x)dx$ también son convergentes para todo $a \in \mathbb{R}$. Además

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

8. Determina para que valores de p es convergente la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^p k}.$$